Ana Patrícia de Sousa Babo

Resolução de problemas de Programação Linear: um estudo no ensino profissional

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação da

Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

Professora Auxiliar

Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira

Vogal: Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março de 2017

Ana Patrícia de Sousa Babo

Resolução de problemas de Programação Linear: um estudo no ensino profissional

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário

Trabalho realizado sob a orientação da

Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

Professora Auxiliar

Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos

Arguente: Prof. Doutora Paula Cristina Antunes Teixeira

Vogal: Prof. Doutora Helena Cristina Oitavem Fonseca da Rocha

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março de 2017

Resolução de problemas de Programação Linear:
um estudo no ensino profissional

Agradecimentos

A uma força superior.
Aos meus pais, por tudo.
À Prof. Doutora Helena Rocha, pela orientação e disponibilidade, pelos ensinamentos e apoios constantes.
Aos meus queridos alunos, por terem abraçado com empenho e entusiasmo as tarefas propostas.
À minha amiga Ana, pela incansável procura do meu bem-estar, pelos incentivos constantes e por estar sempre presente.
A todos que, com profunda ternura, estiveram sempre ao meu lado e souberam compreender os momentos da minha ausência.
A todos aqueles que colaboraram para que este trabalho fosse concluído.

Resumo

A resolução de problemas há muito que é apontada como fundamental na aprendizagem matemática. A Programação Linear enquadra-se neste âmbito, potenciando a modelação de situações reais com o apoio da tecnologia e o desenvolvimento de conexões entre diferentes temas matemáticos. Torna-se assim possível promover o desenvolvimento por parte dos alunos de aprendizagens significativas, enquanto estes se envolvem ativamente na resolução de problemas reais, que lhes permitem compreender a relevância da matemática. A tecnologia é aqui um elemento importante pela interatividade que permite, mas também, e principalmente, pela diversidade de abordagens que potencia. Mas a resolução de problemas é uma atividade frequentemente complexa e exigente para os alunos. Torna-se pois importante conhecer e compreender a forma como os alunos se envolvem na sua concretização.

Assim, este estudo tem como objetivo principal averiguar como alunos do 11.º ano do ensino profissional resolvem problemas de Programação Linear, com recurso à calculadora gráfica. Mais especificamente, pretende-se analisar e compreender como é que os alunos analisam e interpretam o enunciado de problemas de Programação Linear, quais as estratégias que adotam, como é que utilizam a calculadora gráfica e como interagem entre si e com a professora durante a resolução de problemas de Programação Linear.

Do ponto de vista metodológico, e tendo em conta as questões que nortearam o estudo, optou-se por uma abordagem de natureza qualitativa e pela realização de estudos de caso a três pares de alunos: par AB, par CD e par EF. Os dados foram recolhidos durante a implementação de um conjunto de tarefas-problema, recorrendo à observação participante, a recolha documental (das tarefas colocadas e das resoluções efetuadas pelos pares de alunos), a notas de campo e a um questionário final. Os diálogos estabelecidos entre os alunos envolvidos e entre estes e a professora foram áudio gravados e posteriormente transcritos.

As conclusões alcançadas indicam que a interpretação das condições dos problemas de Programação Linear é o aspeto mais delicado da análise do enunciado. Os alunos começam por fazer uma abordagem correta aos problemas colocados, mas a partir de certa altura perdem de vista a intenção de encontrar a melhor solução possível, passando a procurar apenas soluções possíveis que tenham em conta as restrições colocadas. A calculadora gráfica é utilizada por todos como instrumento base de suporte ao trabalho desenvolvido, sendo a realização de cálculos e o apoio à abordagem gráfica as opções assumidas. As dificuldades suscitadas pela situação problemática e a necessidade de interpretar o enunciado, estabelecer uma estratégia de abordagem e discutir os resultados alcançados no contexto da situação são a base para as interações tanto entre os alunos do par, como entre estes e a professora. O principal objetivo subjacente aos diálogos então estabelecidos é a procura de ideias quanto ao que fazer a seguir ou a confirmação de raciocínios e do trabalho já realizado.

Palavras-chave: Programação Linear, Resolução de Problemas, Calculadora Gráfica

Abstract

Problem solving has long been pointed out as fundamental in mathematical learning. The Linear Programming fits within this scope, enhancing the modeling of real situations with the support of technology and the development of connections between different mathematical topics. It is thus possible to promote students' development of meaningful learning as they actively engage in solving real problems that allow them to understand the relevance of mathematics. Technology is an important element here because of the interactivity that it allows, but also, and mainly, by the diversity of approaches allowed. But problem solving is often a complex and demanding activity for the students. It is therefore important to get a better understanding about the students’ involvement in problem solving situations.

Thus, this study has as main objective to investigate how students of the 11th grade of a professional program solve problems of Linear Programming, using the graphing calculator. More specifically, we intend to analyze and understand how the students analyze and interpret the Linear Programming problem, what strategies they adopt, how they use the graphing calculator and how they interact with each other and with the teacher during the resolution of Linear Programming problems.

From the methodological point of view, and taking into account the questions that guided the study, a qualitative approach was adopted, and three case studies of pairs of students were conducted: pair AB, pair CD and pair EF. The data were collected during the implementation of a set of problems, using observation, document gathering (of the tasks proposed and of the resolutions developed by the pairs of students), field notes and a final questionnaire. The dialogues established between the students involved and between them and the teacher were audio recorded and later transcribed.

The conclusions reached suggest that the interpretation of the conditions of Linear Programming problems is the most delicate aspect of the analysis of the task proposed. The students begin adopting a correct approach to the problems, but at a certain point they lose sight of the intention to find the best solution, focusing only on finding possible solutions that take into account the restrictions imposed. The graphing calculator is used by all as a basic tool to support the work developed, performing calculations and supporting the graphical approach. The difficulties raised by the problematic situation and the need to interpret, establish a strategy and discuss the results achieved in the context of the situation are the basis for the interactions both among the students of the pair and between the students and the teacher. The main objective underlying these dialogues is the search for ideas on what to do next or the confirmation of the reasoning and the work already done.

Keywords: Linear Programming, Problem Solving, Graphing Calculator

Índice de matérias

ANEXOS

Índice de figuras

Índice de Quadros

Capítulo 1. Introdução

Sendo o processo de ensino-aprendizagem bastante complexo e exigente para que se consiga alcançar uma educação com qualidade e, consequentemente, desenvolver aprendizagens significativas e motivadoras que despertem a curiosidade dos alunos, é necessário bastante empenho e determinação dos seus intervenientes (Melo, 2012).

Neste sentido, para que consigam adquirir todas as competências matemáticas, é necessário que os alunos se envolvam noutro tipo de experiências para além de ouvir o professor e praticar a resolução de exercícios; é essencial que explorem, investiguem, resolvam problemas, comuniquem, discutam, visto que aprender requer um investimento cognitivo, afetivo e reflexivo (Ponte, 2002). Em particular para os alunos que frequentam o ensino profissional, o desenvolvimento das competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos não é fundamental; o essencial é usar essas ferramentas na resolução de problemas e nas aplicações da matemática, privilegiando situações do ensino experimental (Ministério da Educação, 2004).

A resolução de problemas nos currículos foi uma forma de conseguir que os alunos estudassem matemática e desenvolvessem o poder de raciocinar (Stanic & Kilpatrick, 1989). Estudar matemática através da resolução de problemas, tornando-a mais real, desenvolve a criatividade, o espírito crítico, a interação e a autonomia dos alunos e propicia a formação de cidadãos capazes de responder à vida em sociedade (Melo, 2012). Numa situação de resolução de problemas, a aprendizagem realiza-se quando o aluno se confronta com as suas conceções e constrói os conceitos pretendidos pelo professor, sendo este um mediador, orientador do processo de ensino-aprendizagem e responsável pela sistematização dos novos conhecimentos adquiridos (Onuchic, 2013).

Sendo uma grande finalidade da matemática contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, tornando-os aptos para uma participação completa na sociedade (Ponte, 2002), os alunos devem lidar com situações e ideias matematicamente ricas e usar noções matemáticas, interpretando e modelando situações reais (Ponte, 2002). O Ministério da Educação (2004) considera que a modelação e a resolução de problemas privilegiam a construção de conceitos matemáticos e são uma competência a incrementar, importante para os alunos que frequentam os cursos profissionais, na medida em que estes terão de saber determinar as ferramentas matemáticas adequadas a cada situação da sua vida profissional.

A Programação Linear é uma ferramenta indispensável para a resolução de problemas de decisão (Barros, Pereira & Teixeira, 2010) e um conteúdo com o qual se pode estabelecer conexões com variados temas, entre os quais as *Aplicações e Modelação Matemática*, a *Resolução de Problemas e Atividades Investigativas* e a *Tecnologia e Matemática*, aproximando a matemática da realidade e motivando a descoberta, a investigação, a autonomia e a criatividade (Melo, 2012). A sua abordagem é importante para que os alunos se familiarizem com situações de gestão do dia a dia e para que possam desenvolver competências com o objetivo de tomar decisões corretas em termos de gestão e planeamento (Neves, 2011).

Motivada pelas várias conexões que se podem estabelecer com a Programação Linear e tendo em consideração a elevada importância da resolução de problemas no desenvolvimento de aprendizagens significativas e no poder de raciocinar, a investigadora achou pertinente desenvolver um estudo sobre a resolução de problemas de Programação Linear. Este estudo surge, assim, com o objetivo de averiguar como os alunos do 11.º ano do ensino profissional resolvem problemas de Programação Linear. Mais especificamente, pretende-se analisar e compreender:

i) Como é que os alunos analisam e interpretam o enunciado de problemas de Programação Linear?

ii) Quais as estratégias adotadas pelos alunos na resolução de problemas de Programação Linear?

iii) Como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de problemas de Programação Linear?

iv) Como interagem os alunos entre si e com a professora na resolução de problemas de Programação Linear?

Numa sociedade em constante mudança, em que o desenvolvimento científico e tecnológico exige uma nova postura da escola na formação de alunos como cidadãos críticos, ativos, responsáveis e esclarecidos (Silva & Seixas, 2010), torna-se fundamental a implementação de estratégias de ensino que valorizem as novas tecnologias. A principal razão para a utilização de novas tecnologias tem a ver com o facto de estas proporcionarem a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes, desenvolverem a curiosidade e a criatividade, promovendo a confiança e a autonomia, o espírito de tolerância e compreensão e possibilitando aprendizagens matemáticas mais ativas, que privilegiem a discussão e a comunicação matemática (Paiva, 2008). Face às potencialidades educativas da calculadora gráfica, deve ser dada uma especial relevância à sua utilização de modo a estimular nos alunos o desenvolvimento de competências científicas e sociais (Silva & Seixas, 2010). De acordo com o Ministério de Educação (2004, p. 50), "a resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada atividade".

Tendo em conta estes pressupostos, a investigadora espera contribuir, com este estudo, para o seu desenvolvimento pessoal e profissional e também para fomentar discussões relativamente a estratégias e metodologias de ensino a adotar.

O estudo incide na análise detalhada da resolução de duas tarefas propostas, com recurso à calculadora gráfica, por três pares de alunos de níveis distintos de interiorização de conceitos e diferentes motivações relativamente à disciplina.

Optou-se por utilizar uma metodologia de investigação de caráter qualitativo e interpretativo, privilegiando-se o estudo de caso. A recolha de dados baseou-se na observação participante das aulas, na recolha das resoluções efetuadas pelos participantes nas aulas, nas notas de campo elaboradas pela investigadora e num questionário realizado no final do estudo.

Depois deste capítulo inicial, o capítulo dois apresenta uma revisão da literatura. Inicia-se uma abordagem à Programação Linear, dando particular destaque à resolução de problemas e à utilização da calculadora gráfica nas aulas de matemática.

No terceiro capítulo são referidas e justificadas as opções metodológicas adotadas nesta investigação. É descrita a abordagem utilizada e são apresentados os intervenientes e o plano de ação. Para além disso, são referidos os métodos e os instrumentos de recolha de dados e é feita uma descrição das tarefas e dos procedimentos da análise de dados.

No capítulo quatro é apresentada uma descrição da intervenção didática e a análise dos dados recolhidos e, no último e quinto capítulo, são apresentadas e discutidas as conclusões do estudo e sugeridas algumas recomendações para trabalhos futuros.

Capítulo 2. Revisão da Literatura

Com o intuito de sustentar teoricamente o objetivo e as questões deste estudo, este capítulo desenvolve-se em cinco subcapítulos: História da Programação Linear; Modelo de Programação Linear; A Programação Linear no ensino profissional; Resolução de problemas; A calculadora gráfica.

2.1. História da Programação Linear

Na vida quotidiana, a otimização é uma rotina diária (Eley, 2013). Várias vezes somos confrontados com situações em que temos de tomar decisões de forma a minimizar custos e a rentabilizar recursos disponíveis, isto é, necessitamos de resolver problemas de otimização (Barros, Pereira & Teixeira, 2010). Se, nos problemas de otimização, todas as funções envolvidas forem lineares, tem-se um problema de Programação Linear (Barros, Pereira & Teixeira, 2010).

A procura do ótimo sempre interessou o Homem. Durante mais de 2000 anos foram estudados vários processos para resolver equações lineares (Rafael, 2014), mas foi o matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier, em 1826, o primeiro a conseguir otimizar uma função linear, sujeita a restrições lineares, embora de uma forma pouco rigorosa (Neves, 2011).

Os sistemas de inequações lineares começaram a ser analisados a partir da Segunda Guerra Mundial, em meados do século XX (Rafael, 2014). De facto, nessa altura, deu-se um grande desenvolvimento da Programação Linear com a necessidade de investigar a melhor forma de tomar decisões relativamente à gestão dos recursos logísticos e às operações das forças armadas (Carvalho, 2014).

Um dos pioneiros da Programação Linear, que se interessou pela resolução de problemas de natureza económica, foi o matemático russo Leonid V. Kantorovitch (Rafael, 2014). Este matemático apresentou um algoritmo, em 1939, que permitia obter a maior produção possível, com base numa utilização ótima de recursos disponíveis, relacionados com a administração das organizações (Paiva, 2008).

Entre 1939 e 1951, Von Neumann, Harold Kuhn e A. W. Tucker conseguiram importantes desenvolvimentos teóricos no âmbito da Programação Linear. T. C. Koopmans, A. Charnes e W. W. Cooper aplicaram formulações da Programação Linear e George Dantzig (consultor matemático do USAF – US Air Force Comptroller do Departamento da Forca Aérea Americana), formulou, em termos matemáticos muito precisos, o *algoritmo Simplex* (Carvalho, 2014). Este algoritmo permitia resolver, com alguma facilidade e rapidez, problemas de Programação Linear. Surge assim, pela primeira vez, o termo Programação Linear para designar o método criado (Neves, 2011).

A partir de 1951, surgiram imensos trabalhos que procuravam melhorar a eficiência computacional, completar e aperfeiçoar as suas bases teóricas (Carvalho, 2014).

Em 1975, Kantorovitch e Koopmans, com base na contribuição dada anteriormente por Dantzig, foram agraciados com o prémio Nobel da Ciência em Economia, da Academia Real das Ciências da Suécia, pelas suas brilhantes contribuições na Teoria da Alocação de Recursos (Neves, 2011).

O desenvolvimento tecnológico contribuiu para uma evolução acelerada da Programação Linear, permitindo fomentar a eficiência dos algoritmos na resolução de problemas da gestão organizacional mais complexos (Paiva, 2008). A Programação Linear tornou-se, assim, uma área de intensa investigação.

Em 1986, o matemático indiano Narenda Karmarkar, investigador dos Laboratórios Bell da AT&T (American Telephone and Telegraph), desenvolveu um novo algoritmo, mais rápido que o algoritmo criado por Dantzig, para resolver problemas relacionados com as chamadas telefónicas. Este algoritmo permitia resolver problemas complexos, de forma rápida e eficaz (Neves, 2011).

Para responder à evolução da tecnologia e à crescente complexidade dos dias de hoje, os algoritmos que surgem para resolver os problemas da Programação Linear são cada vez mais rápidos e eficazes (Neves, 2011).

2.2. Modelo de Programação Linear

A Investigação Operacional, segundo Paiva (2008), é a aplicação de um método científico à resolução de um problema. Quando se pretende resolver um problema real de decisão, recorre-se à elaboração de modelos que representem essa realidade, de forma a estudar e a identificar a solução ótima (Neves, 2011). Os modelos auxiliam o encontro de soluções alternativas, a comparação de resultados e a identificação da melhor solução (Neves, 2011).

A Investigação Operacional é um auxiliar valiosíssimo para a determinação eficaz de soluções que, associando diversas técnicas de modelação matemática, permite otimizar os objetivos definidos inicialmente (Carvalho, 2014).

Carvalho (2014, pp.12-13) refere que a metodologia da Investigação Operacional utiliza quatro recursos importantes:

1. A análise sistémica e a definição do problema como pertencente a um todo, sendo equacionadas as perspetivas de todos os setores da organização e recolhida toda a informação relevante. É feita uma descrição sumária da situação e a análise do contexto do problema e do objetivo a que se destina o estudo.
2. A interdisciplinaridade na visão do problema. Os fenómenos em estudo só são cabalmente compreendidos quando exista o contributo de todas as áreas de especialidade relevantes para o assunto em causa.
3. A utilização de modelos. As situações reais muito dificilmente são passíveis de experiências, logo recorre-se a modelos, que representam a realidade de forma mais simples, para a estudar e interpretar.
4. Recurso ao método científico:
   a) Formulação do problema: objetivos, variáveis controláveis e não controláveis, condicionantes, parâmetros impostos, restrições, e agentes de decisão.

b) Construção do modelo matemático: função objetivo e relações entre as variáveis.
c) Obtenção da solução: cálculo da solução ótima, utilizando o método Simplex.
d) Testar o modelo e a solução: novas variáveis, erros cometidos, etc.
e) Estabelecer o controlo da solução: análise de sensibilidades e análises paramétricas.
f) Implementação da solução: problemas técnicos e humanos, etc.

A sequência indicada corresponde à ordem pela qual as fases são iniciadas, no entanto, cada fase não é estanque e estende-se até ao final do estudo (Paiva, 2008).

Os modelos de Programação (no sentido de planificação e resolução de tarefas) Matemática são uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos e estão entre os modelos principais da Investigação Operacional (Goldbarg, Luna & Goldbarg, 2015). Estes têm como objetivo otimizar o funcionamento dos sistemas representados, perante um conjunto de limitações (Paiva, 2008), e são classificados em função do tipo de equações e variáveis do modelo (Goldbarg, Luna & Goldbarg, 2015).

A Programação Linear é um caso particular dos modelos de Programação Matemática em que as variáveis de decisão são contínuas e apresentam um comportamento linear, relativamente às restrições e à função-objetivo (Goldbarg, Luna & Goldbarg, 2015). É uma técnica de modelação matemática projetada para otimizar o uso de recursos limitados através da utilização de modelos que representem uma realidade, em que o ótimo é um mínimo ou um máximo a ser alcançado nas condições existentes (Paiva, 2008).

O modelo de Programação Linear é um modelo básico da Programação Matemática, tanto pela sua simplicidade de elaboração e entendimento, como por auxiliar na compreensão dos modelos abordados pela Programação Matemática (Goldbarg, Luna & Goldbarg, 2015). É um modelo matemático de otimização em que todas as funções e restrições são lineares (Goldbarg, Luna & Goldbarg, 2015).

As características seguintes estão presentes nos modelos de Programação Linear, segundo Goldbarg, Luna e Goldbarg (2015):

- Proporcionalidade: a quantidade de recurso consumido por uma dada atividade deve ser linearmente proporcional ao nível dessa atividade na solução final do problema.
- Não Negatividade: as variáveis devem ser capazes de assumir qualquer valor não negativo no modelo.
- Aditividade: o valor total das funções do modelo é calculado pela soma das parcelas associadas a cada atividade.
- Separabilidade: pode-se identificar de forma independente o valor ou consumo de recursos de cada atividade ou variável do modelo.

Goldbarg, Luna e Goldbarg (2015) sugerem que a construção de um modelo de Programação Linear siga as seguintes etapas:

- Definição das atividades: As atividades do modelo são definidas a partir da análise do problema.
- Definição dos recursos: Os recursos são insumos ou resultados utilizados ou produzidos pelas atividades.
- Cálculo dos coeficientes de insumo e produção: Os modelos exigem a definição formal do relacionamento entre as atividades e os recursos.

- Determinação das condições externas e condicionantes internos: Considerando que os recursos são limitados na prática real, cumpre determinar a quantidade de cada insumo (um recurso que é importado pelo sistema) disponível para os processos representados.

Quando se recorre ao modelo de Programação Linear, deve ter-se em consideração as fases supracitadas, apesar da sequência não ser rígida (Neves, 2011).

Para resolver um problema de Programação Linear deve analisar-se, cuidadosamente, todos os dados, identificando toda a informação relevante, e só depois da análise de todo o processo se deve proceder à formulação do problema (Neves, 2011). Nesta fase, é importante descrever, com exatidão, os objetivos do estudo, identificar as alternativas de decisão presentes e reconhecer as limitações, as restrições e as exigências do sistema (Neves, 2011).

O processo de definição do problema é fulcral, pois dele dependem as conclusões do estudo (Paiva, 2008). Para que se alcance a formulação que melhor represente a situação real em estudo, a formulação inicial do problema deve ser reformulada tantas vezes quanto as necessárias (Paiva, 2008).

Depois do problema formulado, constrói-se o modelo matemático, definindo a função objetivo e as relações entre as variáveis (Neves, 2011).

De seguida, calcula-se a solução ótima, obtendo-se, assim, a solução mais vantajosa para o problema em estudo, de entre todas as soluções possíveis definidas pelo conjunto de restrições (Neves, 2011).

Uma vez encontrada a solução ótima, testa-se o modelo e a solução encontrada. Analisa-se a solução obtida para verificar a eficiência do sistema e o seu impacto no processo de decisão (Neves, 2011). Se a eficiência for a melhor, a solução encontrada será muito próxima da solução real e, portanto, o modelo é adequado ao problema inicialmente proposto (Neves, 2011). Caso contrário, é necessário alterar as hipóteses consideradas inicialmente ou redefinir as variáveis de decisão (Neves, 2011). Na maioria dos casos, devido às simplificações, a solução ótima encontrada pelo modelo não é a solução ótima real, mas é muito próxima (Neves, 2011).

Por último, e depois de validar o modelo e a solução ótima, implementa-se a solução (Neves, 2011).

2.3. A Programação Linear no ensino profissional

A Programação Linear é um dos temas obrigatórios nas disciplinas de matemática A e matemática B do ensino secundário e no módulo A10 do ensino profissional. A investigadora vai centrar o seu estudo no processo de ensino-aprendizagem da matemática no ensino profissional, mais concretamente no módulo A10 – Otimização.

As finalidades da disciplina de matemática, no ensino profissional, segundo o Ministério da Educação (2004, p. 2), são:

> desenvolver a capacidade de usar a matemática como instrumento de interpretação e intervenção no real; desenvolver a capacidade de selecionar a matemática relevante para cada problema da realidade; desenvolver as

> capacidades de formular e resolver problemas, de comunicar, assim como a memória, o rigor, o espírito crítico e a criatividade; promover o aprofundamento de uma cultura científica, técnica e humanística que constitua suporte cognitivo e metodológico tanto para a inserção plena na vida profissional como para o prosseguimento de estudos; contribuir para uma atitude positiva face à Ciência; promover a realização pessoal mediante o desenvolvimento de atitudes de autonomia e solidariedade; criar capacidades de intervenção social pelo estudo e compreensão de problemas e situações da sociedade atual e bem assim pela discussão de sistemas e instâncias de decisão que influenciam a vida dos cidadãos, participando desse modo na formação para uma cidadania ativa e participativa.

É de salientar que para os alunos que frequentam o ensino profissional, o desenvolvimento das competências ao nível do domínio das regras lógicas e dos símbolos não é fundamental (Ministério da Educação, 2004). O essencial é usar essas ferramentas na resolução de problemas e nas aplicações da matemática, privilegiando situações do ensino experimental (Ministério da Educação, 2004).

O Ministério da Educação (2004) considera ainda que a modelação e os problemas privilegiam a construção de conceitos matemáticos e são uma competência a incrementar, pela importância que assumem para os alunos, na medida em que estes terão de saber determinar as ferramentas matemáticas adequadas a cada situação da sua vida profissional. Uma grande finalidade da matemática é, afinal, contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, tornando-os aptos para uma participação completa na sociedade (Ponte, 2002). Os alunos devem, portanto, ter ocasião de lidar com situações e ideias matematicamente ricas e usar noções matemáticas, interpretando e modelando situações reais (Ponte, 2002).

Como ferramentas essenciais, é obrigatório o uso de calculadoras gráficas (Ministério da Educação, 2004). No programa, é referido que as calculadoras gráficas “devem ser entendidas não só como instrumentos de cálculo mas essencialmente como meios incentivadores do espírito de pesquisa” (Ministério da Educação, 2004, pp. 6-7) e são citados alguns tipos de atividades que se podem explorar com a sua utilização:

> abordagem numérica de problemas; uso de manipulações algébricas para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos gráficos; uso de métodos gráficos para resolver equações e inequações e posterior confirmação usando métodos algébricos; modelação, simulação e resolução de situações problemáticas; uso de cenários visuais gerados pela calculadora para ilustrar conceitos matemáticos; uso de métodos visuais para resolver equações e inequações que não podem ser resolvidas, ou cuja resolução é impraticável, com métodos algébricos; condução de experiências matemáticas, elaboração e análise de conjeturas; estudo e classificação do comportamento de diferentes classes de funções; antevisão de conceitos do cálculo diferencial; investigação e exploração de várias ligações entre diferentes representações para uma situação problemática (Ministério da Educação, 2004, pp. 6-7).

A principal razão para a utilização de novas tecnologias tem a ver com o facto de estas proporcionarem a criação de contextos de aprendizagem ricos e estimulantes, desenvolverem a curiosidade e a criatividade, promovendo a confiança e a autonomia, o espírito de tolerância e compreensão e possibilitando aprendizagens matemáticas mais ativas, que privilegiem a discussão e a comunicação matemática (Paiva, 2008).

De acordo com o Ministério de Educação (2004, p. 50), “a resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada atividade”. Torna-se, portanto, imprescindível proporcionar aos alunos ocasiões para explorarem problemas de Programação Linear apoiando-se na tecnologia.

A abordagem da Programação Linear é importante para que os alunos se familiarizem com situações de gestão do dia a dia e para que possam desenvolver competências com o objetivo de tomar decisões corretas em termos de gestão e planeamento (Neves, 2011).

No módulo A10 – Otimização, a competência matemática que os alunos devem desenvolver, segundo o Ministério da Educação, inclui os seguintes aspetos:

> a aptidão para fazer e investigar matemática recorrendo à modelação com uso das tecnologias; a aptidão para elaborar, analisar e descrever modelos para fenómenos reais utilizando funções já estudadas; a aptidão para reconhecer sobre os modelos os valores ótimos para cada situação e capacidade para tomar boas decisões; a capacidade de comunicar oralmente e por escrito as situações problemáticas e os seus resultados; a capacidade de apresentar de forma clara, organizada e com aspeto gráfico cuidado os trabalhos escritos, individuais ou de grupo, quer sejam pequenos relatórios, monografias, etc.; a capacidade de usar uma heurística para a resolução de problemas (Ministério da Educação, 2004, pp. 51-52).

A lecionação deste tema pressupõe que os alunos consigam atingir os seguintes objetivos de aprendizagem:

> utilizar os estudos gráfico, numérico e analítico de funções; relacionar os efeitos das mudanças de parâmetros nos gráficos de funções e as respetivas taxas de variação; reconhecer numérica e graficamente a relação entre o sinal da taxa de variação e a monotonia de uma função; reconhecer a relação entre os zeros da taxa de variação e os extremos de uma função; resolver problemas de aplicações simples envolvendo a determinação de extremos de funções racionais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas; reconhecer que diferentes situações podem ser descritas pelo mesmo modelo matemático; resolver numérica e graficamente problemas simples de Programação Linear; reconhecer o contributo da matemática para a tomada de decisões, assim como as suas limitações (Ministério da Educação, 2004, p. 52).

Este é, portanto, um conteúdo que possibilita ao aluno uma melhor compreensão dos conteúdos de Geometria e Equações, assim como permite estabelecer conexões com variados temas, entre os quais as “Aplicações e Modelação Matemática”, a “Resolução de Problemas e Atividades Investigativas” e a “Tecnologia e Matemática”, centrais de todo o programa.

2.4. Resolução de problemas

2.4.1. Conceito de problema

Sendo a resolução de problemas um tema importante do ensino da matemática, torna-se necessário definir o que é um problema matemático e a sua diferenciação relativamente a outras atividades.

Para Santos e Ponte (2002, p. 31) “um problema é uma dificuldade, não trivial, que se pretende ultrapassar” e English, Lesh e Fennewald (2008) mencionam que problemas são atividades que se desenvolvem quando o processo de resolução não é óbvio. Villa e Callejo (2006, citado por Milani, 2011, p. 39) referem que

> um bom problema é uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática, cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova.

Milani (2011) afirma que os problemas são instrumentos de aquisição de conhecimentos e os exercícios são instrumentos de verificar e consolidar conhecimentos e habilidades.

As conceções de problema referidas têm alguns pontos em comum. Os problemas devem ser acessíveis aos alunos e, por isso, é necessário que estes tenham conhecimentos prévios necessários de conteúdos matemáticos para que possam encontrar a solução e são fundamentais na aprendizagem da matemática, pois permitem que o aluno questione e pense por si próprio.

Ponte (2005) distingue os problemas, os exercícios, as investigações e as explorações. Refere duas dimensões fundamentais das tarefas:

i) o grau de desafio matemático, relacionado com a dificuldade das questões colocadas;

ii) o grau de estrutura, relacionado com a natureza das questões colocadas.

O autor obtém quatro quadrantes, cruzando estas duas dimensões:

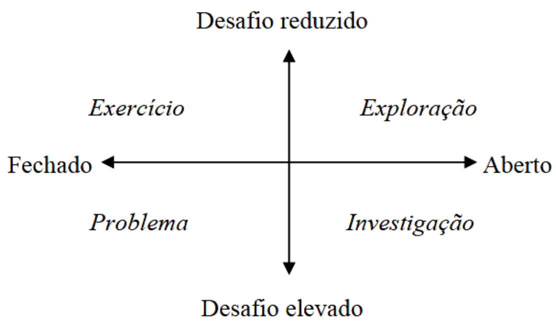


Figura 2.1: Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p.8)

O autor define “exploração” como uma tarefa aberta e de desafio reduzido (1.º quadrante), “exercício” como uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2.º quadrante), “problema” como uma tarefa fechada e de elevado desafio (3.º quadrante) e “investigação” como uma tarefa aberta e de desafio elevado (4.º quadrante).

Schoenfeld (1996) aponta quatro propriedades que caracterizam os problemas que considera potencialmente valiosos: Os bons problemas são acessíveis, facilmente compreendidos e não necessitam de grandes "maquinarias" para fazer progressos neles; os bons problemas podem ser resolvidos por vários processos; os problemas e as respetivas soluções devem servir de introdução a importantes ideias matemáticas; os problemas devem servir para explorações matemáticas, de forma a permitir aos alunos fazer matemática.

2.4.2. A resolução de problemas na educação matemática – Contexto histórico

Desde Platão, pelo menos, que se considera que, estudando matemática, se melhora as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas e, de um certo modo, a resolução de problemas nos currículos foi uma forma de conseguir que os alunos estudassem matemática e desenvolvessem o poder de raciocinar (Stanic & Kilpatrick, 1989).

De acordo com o Ministério de Educação (2004, p. 50), "a resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada atividade".

Estudar matemática através da resolução de problemas, tornando-a mais real, desenvolve a criatividade, o espírito crítico, a interação e a autonomia dos alunos e propicia a formação de cidadãos capazes de responder à vida em sociedade (Melo, 2012).

Neste contexto, a abordagem da Programação Linear é importante para que os alunos se familiarizem com situações de gestão do dia a dia e para que possam desenvolver competências que permitam tomar decisões corretas em termos de gestão e planeamento (Neves, 2011). A Programação Linear aproxima a matemática da realidade, motiva a descoberta, a investigação, a autonomia e a criatividade (Melo, 2012).

Longos foram os anos em que o ensino da matemática era extremamente rígido, voltado para a repetição e mecanização da aprendizagem (Melo, 2012). O processo de ensino-aprendizagem era centrado no professor que explicava o conteúdo, abrangendo um grande número de alunos ao mesmo tempo (Onuchic, 2013), e o aluno escutava, memorizava e repetia as informações (Melo, 2012; Schoenfeld, 1996).

Numa situação de resolução de problemas, a aprendizagem ocorre quando o aluno se confronta com as suas conceções e constrói os conceitos pretendidos pelo professor, sendo este um mediador, orientador do processo de ensino-aprendizagem e responsável pela sistematização dos novos conhecimentos adquiridos (Onuchic, 2013).

A perceção de que a resolução de problemas é a chave para o desenvolvimento de toda a atividade matemática não é uma ideia nova (Abrantes, 1989). De facto, Stanic e Kilpatrick (1989) afirmam que a resolução de problemas tem uma longa história nos currículos de matemática. De acordo com estes autores, a resolução de problemas remonta, pelo menos, aos antigos egípcios, chineses e gregos, visto que foram encontrados problemas, por exemplo, no Papiro de Ahmes, em 1650 a. C., num manuscrito matemático egípcio e num documento chinês, em 1000 a.C.. Problemas com resoluções semelhantes foram também encontrados em livros de matemática dos séculos XIX e XX e, até ao século XX, defendia-se que a matemática permitia melhorar o pensamento das pessoas e, portanto, esta era a principal razão para a importância dada pelos educadores à resolução de problemas (Stanic & Kilpatrick, 1989).

Stanic e Kilpatrick (1989, p. 12) referem que, desde o antigo Egito até hoje, "três temas gerais caracterizam o papel da resolução de problemas nos currículos de matemática nas escolas: resolução de problemas como contexto, resolução de problemas como capacidade e resolução de problemas como arte". A resolução de problemas como contexto baseia-se na ideia de que "os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir fins importantes", a resolução de problemas como capacidade é dominante para aqueles que veem a resolução de problemas como uma "valiosa finalidade curricular" e a resolução de problemas como arte é vista como a arte que os alunos devem aprender, espontaneamente e criativamente. É no último tema que se enquadra a sugestão do matemático húngaro George Pólya (1887-1985), na década de 1940, no seu livro *A arte de resolver problemas*: a resolução de problemas como metodologia de ensino da matemática. No prefácio do seu livro pode ler-se:

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta (Pólya, 1957, p. v).

Pólya foi considerado um dos melhores matemáticos do século XX e foi o primeiro a apresentar uma estratégia de resolução de problemas, específica para a matemática (Gazzoni & Ost, 2009). Pólya preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias para resolver problemas (Onuchic & Allevato, 2011).

Depois de Pólya, surgiram diferentes obras dedicadas à resolução de problemas, assim como clubes e concursos (Abrantes, 1989).

Em 1980, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics), nos Estados Unidos, apresentou um documento "An Agenda for Action" propondo uma série de recomendações para uma melhor educação matemática. A primeira das recomendações referia que a resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar nessa década e que os educadores deveriam desenvolver nos alunos a habilidade de resolução de problemas (Melo, 2012). Esta associação americana publicou também *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, em 1989, *Professional standards for teaching mathematics*, em 1991, e *Assessment standards for school mathematics*, em 1995, com vista a auxiliar os professores e a destacar aspetos considerados essenciais para o ensino da matemática (Onuchic & Allevato, 2011).

Infelizmente, muitos dos problemas resolvidos nos anos 80 eram rotineiros e superficiais (Schoenfeld, 1996) e a matemática escolar, segundo Abrantes (1989), parecia ter adotado sempre as atividades de resolução de problemas como atividades complementares, por vezes associadas a propósitos de popularização da matemática ou de motivação para o estudo.

Nesta altura, a resolução de problemas tinha como base as ideias do construtivismo e da teoria sociocultural, sendo Vygotsky o principal teórico (Onuchic & Allevato, 2011). Os processos de pensamento matemático e de aprendizagem por descoberta eram os pontos fulcrais (Onuchic & Allevato, 2011). Foram desenvolvidos vários materiais com vista à resolução de problemas, como coleções de problemas, lista de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Apesar desse material ajudar os professores a centrar as suas atividades na resolução de problemas, muitas foram as dificuldades encontradas para ensinar (Onuchic, 2013). Infelizmente, não havia uma orientação clara a seguir para se obter bons resultados no ensino da matemática apoiado na resolução de problemas (Onuchic & Allevato, 2011).

Em 1990, o National Science Foundation (NSF) financiou uma série de materiais instrucionais para todos os níveis de ensino o que levou ao surgimento de uma nova geração de currículos alinhados com os currículos de 1980 (Onuchic, 2013). A resolução de problemas veio permitir o desenvolvimento de conteúdos matemáticos e fazer conexões com outras áreas (Onuchic, 2013). Após uma série de apreciações aos currículos, em 2000, o NCTM trabalhou sobre críticas e sugestões recebidas e publicou os *Principles and standards for school mathematics*, conhecidos como os *Standands 2000* (Onuchic, 2013). Os *Standands 2000* reformulam os documentos originais criados em 1980 sem alterar a sua visão essencial (Onuchic, 2013) e enunciam

> seis Princípios (Equidade, Currículo, Ensino, Aprendizagem, Avaliação, e Tecnologia); cinco Padrões de Conteúdo (Números e Operações, Álgebra, Geometria, Medida, e Análise de Dados e Probabilidade); e cinco Padrões de Procedimento, entre os quais o primeiro é Resolução de Problemas, seguido por Raciocínio e Prova; Comunicação; Conexões; e Representação (Onuchic & Allevato, 2011, p. 79).

A partir dos *Standands 2000* passou a pensar-se numa metodologia de ensino-aprendizagem da matemática através da resolução de problemas, onde o problema é o ponto de partida para a construção de novos conceitos, os alunos são co-construtores do seu próprio conhecimento e os professores orientam todo o processo (Onuchic & Allevato, 2011).

English, Lesh, e Fennewald (2008, p. 1) concluem que

> entre os desenvolvimentos admiráveis estão o pioneiro Pólya (1945) sobre como resolver problemas; os estudos de resolvedores de problemas (por exemplo, Anderson, Boyle & Reiser, 1985); a pesquisa sobre o ensino de estratégias em resolução de problemas; e heurísticas e posteriores processos metacognitivos (por exemplo, Charles & Silver, 1988; Lester, Garofalo & Kroll, 1989); e, mais recentemente, estudos sobre modelação matemática (por exemplo, Lesh & English, 2007). Atualmente, perspetivas já existentes sobre resolução de problemas têm tratado essa pesquisa como um tópico isolado, onde as habilidades em resolução de problemas são assumidas para desenvolver, através da aprendizagem inicial de conceitos e procedimentos seguidos pela prática de “problemas com enunciados”, através da exposição a uma série de estratégias (por exemplo, “desenhe um diagrama”, “adivinhe e verifique”) e, finalmente, através de experiências em aplicar essas competências para resolver problemas “recentes” ou “não rotineiros”.

2.4.3. A resolução de problemas e o processo de ensino-aprendizagem

Vários educadores matemáticos, em todo o mundo, têm-se preocupado em entender, melhorar e promover o ensino e a aprendizagem da matemática. São vários os estudos e as pesquisas em educação matemática que indicam que a resolução de problemas é uma forma de desenvolver uma aprendizagem sólida e significativa nas aulas de matemática.

Como resolver problemas não é uma tarefa intrínseca, aprender a resolver problemas é um assunto que deve ser bem trabalhado (Melo, 2012). A mudança de hábitos, por parte dos alunos, requer persistência e muita paciência e determinação por parte do professor (Melo, 2012). A APM (1988) defende que é importante que a atividade dos alunos não se reduza a encontrar a solução do problema e afirma que os alunos começam a fazer matemática quando tentam responder a um conjunto de questões relacionadas com a estratégia a adotar e com a necessidade de reformular o problema. Menciona ainda que o processo de resolução de problemas é um processo duradouro que valoriza o processo de aprendizagem e não apenas o produto final e que merece especial destaque nas atividades curriculares de matemática por diversas razões:

- O desenvolvimento da matemática tem sobretudo resultado dos esforços postos na resolução dos mais variados problemas que se tem colocado aos matemáticos, tanto a partir de situações concretas do mundo físico, como a partir do interior da própria matemática. Se pretendemos que os alunos façam a sua experiência matemática, então o "problem solving" corretamente entendido constitui um dos melhores processos.
- As atividades de "problem solving" conduzem naturalmente a outras atividades importantes no processo educativo matemático entre as quais são de referir a discussão sobre estratégias, a argumentação, as tentativas de prova, a crítica dos resultados, a construção de conceitos e a adoção por necessidade de uma terminologia matemática.
- A aquisição progressiva de proficiência na resolução de problemas e a segurança que daí resultam não são apenas importantes na matemática, constituem objetivos gerais importantes na escola (APM, 1988, p. 7).

English, Lesh e Fennewald (2008, pp. 10-11) referem que

> Chegou a hora de considerar outras opções para avançar na pesquisa em resolução de problemas e desenvolvimento curricular. Há necessidade de reexaminar as hipóteses de nível fundamental sobre o que significa compreender conceitos e processos de resolução de problemas matemáticos. Uma poderosa alternativa é a de utilizar as perspetivas teóricas e as metodologias de pesquisa associadas a uma perspetiva de modelos e modelação (MMP) em ensino, aprendizagem e resolução problemas matemáticos. Adotar uma MMP significa ter pesquisadores que estudam desenvolvimentos de modelos e modelação dos estudantes e que naturalmente utilizam abordagens integradas para explorar o (co)desenvolvimento de conceitos matemáticos, processos de resolução de problemas, funções metacognitivas, disposições, crenças e emoções.

Pólya, analisando as perspetivas de diversos autores, preocupou-se em descobrir como resolver problemas e como ensinar estratégias para resolver problemas (Onuchic & Allevato, 2011). Pólya (1957) caracteriza claramente as técnicas de resolver um problema e expõe o seu método em quatro etapas: a 1.ª etapa é compreender o problema, isto é, é necessário procurar compreender o problema, definir a incógnita, definir as condições do problema e verificar se é possível estimar a resposta; a 2.ª etapa é elaborar um plano, sendo necessário encontrar estratégias de resolução, organizar os dados e tentar resolver o problema por fases; a 3.ª etapa é a execução do plano, onde é necessário verificar cada passo da resolução, executar todos os cálculos e todas as estratégias pensadas; a 4.ª e última etapa é verificar a solução, onde é necessário verificar se a solução obtida está correta, examinar todo o raciocínio efetuado, verificar se existe outra forma de resolver o problema e se é possível aplicar a resolução efetuada a problemas semelhantes. A reflexão da resolução completa do problema, reconsiderando e reexaminando o resultado e o processo que o levou até este, permite consolidar os conhecimentos e aperfeiçoar a capacidade dos alunos de resolver problemas, visto que é sempre possível aprimorar a compreensão da resolução (Pólya, 1957).

Para facilitar a compreensão dos problemas de matemática, Echeverría (1998, citado por Melo, 2012, pp. 47-48) contribui, sugerindo algumas orientações:

- Expressar o problema por outras palavras.
- Explicar aos colegas em que consiste o problema.
- Representar o problema com outro formato.
- Indicar qual é a meta do problema.
- Apontar onde reside a dificuldade da tarefa.
- Separar os dados com os quais contamos para resolver a tarefa.
- Indicar quais os dados que não estão presentes mas que são necessários para resolver a tarefa.
- Procurar um problema semelhante que já tenham resolvido.
- Analisar inicialmente alguns exemplos concretos, quando o problema é muito geral.
- Procurar diferentes situações nas quais esse problema possa ter lugar.

A experiência de Pólya no ensino da matemática leva-o a questionar como as pessoas fazem descobertas matemáticas e como alcançam algum gosto pela descoberta e a concluir que os alunos precisam de ser ensinados a usar o raciocínio plausível, a fazer matemática (Stanic & Kilpatrick, 1989). Para Pólya, só através da resolução de problemas não rotineiros, os alunos podem desenvolver o raciocínio independente (Pólya, 1957).

É bastante importante, ao nível da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões fundamentais à sua resolução (Onuchic, 2013). Pretende-se que a participação dos alunos passe a ser ativa, valorizada e estimulada e que o aluno desenvolva o raciocínio na tentativa de resolver o problema, que pense em vários processos de resolução, que faça comparações dos seus resultados com os seus colegas e que comprove os seus resultados (Melo, 2012).

> A resolução de problemas deve ser um processo que envolva ativamente os alunos na formulação de conjeturas, na investigação e exploração de ideias que os leve a discutir e pôr em questão a sua própria maneira de pensar e também a dos outros, a validar resultados e a construir argumentos convincentes (NCTM, 1987, citado por Abrantes, 1989, p. 8).

“Proporcionar oportunidades aos alunos para resolverem, explorarem, investigarem e discutirem problemas, numa larga variedade de situações, é uma ideia-chave para que a aprendizagem da matemática constitua uma experiência positiva significativa” (Abrantes, 1989, p. 35).

No processo de resolução de um problema, Pólya (1957) menciona que o aluno precisa não só de o compreender, mas de desejar resolvê-lo e, para que não falte compreensão e interesse, o professor deve escolher um problema acessível e interessante. Defende que o professor é a solução para que a atividade de resolução de problemas seja proveitosa, pois este pode apresentar problemas adequados para uma dada aula e promover a ajuda apropriada (Pólya, 1957). Desta forma, o dia a dia requer um grande esforço por parte do professor no sentido de envolver os alunos num processo de ensino-aprendizagem que seja motivador e significativo (Melo, 2012).

É extremamente importante que o professor saiba quais as competências matemáticas que deseja desenvolver nos alunos e oriente as suas atividades com esse propósito (APM, 1988). É necessário tornar as aulas mais interessantes, desafiadoras e dinâmicas para que os alunos participem ativamente na construção do seu conhecimento (APM, 1988; Melo, 2012). Uma boa seleção de problemas é o ponto essencial para alcançar os objetivos desejados (APM, 1988; Melo, 2012; Schoenfeld, 1996).

O professor deve trabalhar a matemática de forma a que o aluno construa o seu próprio conhecimento, com a sua efetiva participação (Onuchic, 2013), despertando a curiosidade dos alunos, através de questionamentos constantes nas suas atividades (Melo, 2012). Através do questionamento na resolução de problemas, o professor pode incentivar os seus alunos a identificar e a corrigir os seus possíveis erros, a generalizar estratégias para problemas mais complexos e a refletir sobre as suas interpretações e necessidades (Melo, 2012; Pólya, 1957; Santos & Ponte, 2002). O professor deve começar por uma sugestão genérica, simples e natural, e descer gradualmente para outras sugestões mais específicas até provocar a resposta na mente do estudante (Pólya, 1957).

Pólya (1957) refere que se os professores desafiarem a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os seus conhecimentos e interesses e auxiliando-os nas explorações, estimulam o gosto pelo raciocínio independente, o prazer no estudo da matemática que o aluno não esquecerá tão facilmente. Afirma também que o professor deve estimular os alunos a conceber situações em que poderão utilizar as mesmas estratégias e os mesmos resultados e que a capacidade de resolver problemas de um estudante poderá melhorar se, após algumas experiências com problemas semelhantes, ele adquirir o hábito de orientar a sua atenção para a utilização dos dados importantes, a variação dos dados, a simetria e a semelhança.

Com o intuito de promover a autonomia nos alunos, Melo (2012) refere que é fundamental que os alunos trabalhem, inicialmente sozinhos, e que compete ao professor orientar, após observar e ouvir os alunos. Pólya (1957) refere que o professor deve auxiliar discretamente e com naturalidade o trabalho do estudante, ou seja, se o aluno não conseguir realizar as atividades propostas, o professor deve procurar compreender o seu ponto de vista e indicar, por exemplo, um passo que lhe poderia ter ocorrido, deixando-lhe a ilusão de trabalho independente. Refere também que os professores devem proporcionar aos alunos muitas oportunidades de imitar e de praticar problemas, pois acredita que os alunos aprendem a resolver problemas, resolvendo-os.

Desta forma, os problemas propostos aos alunos devem ser possíveis, reais e contextualizados de modo a que os alunos se sintam envolvidos, desafiados e motivados (Melo, 2012; Pólya, 1957) e que desenvolvam discussões argumentativas e interações (Melo, 2012). É importante ter em conta que o encontro da solução de cada problema proposto deve estar dentro das capacidades dos alunos (APM, 1988; Pólya, 1957) e que a maneira como o problema é apresentado é determinante para um maior ou menor empenho e motivação dos alunos (Melo, 2012).

Vários objetivos podem ser atingidos com a implementação da resolução de problemas. Quando o professor ensina com o intuito de os alunos resolverem problemas, ele está concentrado na forma como a matemática é ensinada e como pode ser aplicada e, neste caso, os conhecimentos adquiridos no contexto de um problema podem ser aplicados para resolver outros problemas, noutros contextos (Milani, 2011). Quando o professor ensina via resolução de problemas, “o ensino está centrado no aluno, que constrói os conceitos matemáticos durante a resolução de um problema, sendo a seguir formalizados pelo professor” e, portanto, os problemas são o caminho para se ensinar matemática sendo importante a criação de ambientes de sala de aula motivadores e que fomentem a curiosidade dos alunos (Milani, 2011, p. 54).

Milani (2011) refere que ensinar matemática através da resolução de problemas pressupõe um rigor metodológico, sendo o professor, além de intermediário entre o conhecimento e o aluno, responsável pela criação e conservação de um ambiente de sala de aula motivador e estimulante.

Onuchic e Alevatto (2011, pp. 83-85) no seu grupo de trabalho e estudo (GTERP) criaram um conjunto de sugestões que podem servir de orientação aos interessados em implementar uma atividade através da resolução de problemas:

- Preparação do problema – Selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
- Leitura individual – Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
- Leitura em conjunto – Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos.
    - Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
    - Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
- Resolução do problema – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

- Observar e incentivar – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.
    - O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas, necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda os alunos em suas dificuldades, colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho.
- Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
- Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
- Busca do consenso – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
- Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado formalização, o professor registra na lousa uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Com esta metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes dos conteúdos terem sido apresentados formalmente e, assim, o processo de ensino-aprendizagem de um tema começa com o desenvolvimento de alguns tópicos de um problema para os quais os alunos devem procurar estratégias a fim de encontrar respostas para o problema (Onuchic & Alevatto, 2011).

Para a aplicação das atividades de resolução de problemas, o professor deverá proporcionar aos alunos o máximo de recursos auxiliares de ensino disponíveis (Melo, 2012). Neste contexto, destacam-se os ambientes informatizados, pois facilitam a exploração e a compreensão dos problemas, possibilitam um maior dinamismo e interação, fazendo com que os alunos se sintam mais motivados e envolvidos nas atividades (Melo, 2012).

2.5. A calculadora gráfica

Numa sociedade em constante mudança, o desenvolvimento científico e tecnológico exige uma nova postura da escola na formação de alunos como cidadãos críticos, ativos, responsáveis e esclarecidos, de modo a facilitar-lhes uma plena integração na sociedade, assim como no desenvolvimento de atitudes intervenientes e construtivas, com vista a melhorar a qualidade do mundo em que estão integrados (Silva & Seixas, 2010). É fundamental, deste modo, a implementação de estratégias e mudanças de inovação pedagógica que proporcionem a construção e valorização de aprendizagens, incluindo a integração das novas tecnologias, de forma a transformar a escola e, assim, obter melhorias na Educação.

É neste sentido que Rocha (2011b) refere que, em resultado de estudos elaborados por Doerr e Zangor (2000), Powers e Blubaugh (2005), Polly, Mims, Shepherd e Inan (2010) e Bowers e Stephens (2011), um dos aspetos que tem vindo a ser alvo de uma importância crescente e cada vez mais reconhecida é o conhecimento de que os professores necessitam para integrar a tecnologia no processo de ensino-aprendizagem. O reconhecimento desta importância levou a autora a desenvolver o modelo CEMT - Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia, que "considera quatro domínios base do conhecimento, mas valoriza particularmente conhecimentos que transcendem cada um destes e, em particular, dois conjuntos de conhecimentos interdomínios, um na confluência do conhecimento da Matemática, Currículo e Tecnologia e outro na do Ensino Aprendizagem, Currículo e Tecnologia" (Rocha, 2011b, p. 655).

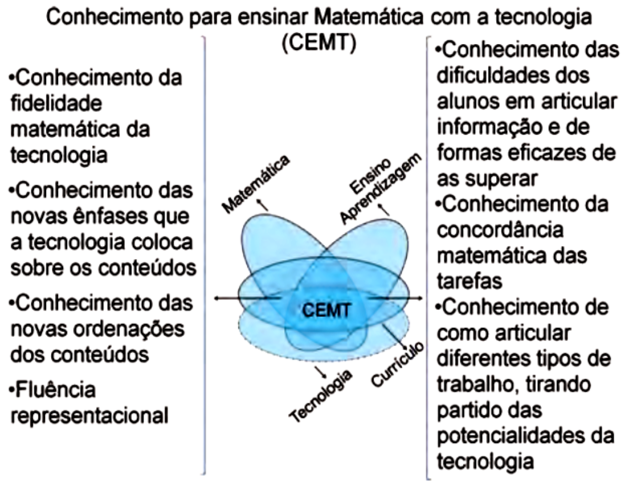


Figura 2.2: Modelo CEMT - Conhecimento para Ensinar Matemática com a Tecnologia (Rocha, 2011b, p. 655)

Para integrar a tecnologia no processo de ensino-aprendizagem é necessário, também, que o professor planifique tarefas que sejam adequadas e motivadoras. Segundo Ponte (2002), a forma como os educadores tiram partido das tecnologias é fundamental para promover uma boa aprendizagem. É fulcral confrontar "situações novas, inovadoras, pensadas, refletidas e analisadas de forma consciente e necessárias na aprendizagem em geral" e realçar as capacidades gráficas como mudança efetiva na abordagem de alguns conteúdos (Silva & Seixas, 2010, p. 146).

Tendo em conta este pressuposto, as tecnologias combinam com uma aula cooperativa, investigativa, informativa e crítica, onde o professor participa e auxilia na aprendizagem (Marques & Caetano, 2002).

Face às potencialidades educativas da calculadora gráfica, deve ser dada uma especial relevância à sua utilização de modo a estimular nos alunos o desenvolvimento de competências científicas e sociais (Silva & Seixas, 2010). A calculadora gráfica precisa de ser utilizada de forma adequada, para que todas as suas potencialidades sejam aproveitadas e para que os alunos desenvolvam espírito crítico e autonomia na resolução de problemas e na descoberta de conceitos matemáticos (Ponte & Canavarro, 1997).

Hoje em dia, o uso da calculadora gráfica no ensino da matemática é obrigatório. Com efeito, a utilização da calculadora gráfica proporciona oportunidades de alargar e aprofundar conteúdos e aplicações da matemática e possibilita a resolução de vários tipos de problemas (Ponte & Canavarro, 1997; Silva & Seixas, 2010). Pode ser também um instrumento mediador e facilitador no desenvolvimento da argumentação matemática (Magalhães & Martinho, 2011), permite a modelação de situações reais, construindo o modelo com base na interpretação da situação (Ponte & Canavarro, 1997; Rocha, 2011a) e permite aceder a múltiplas representações (Heid, 1995; Kaput, 1992; citado por Rocha, 2011a). Enriquece ainda a capacidade de investigar e de desenvolver raciocínios e argumentos, na medida em que desafia e estimula os alunos a comunicar, a formular conjeturas e a desenvolver capacidades intelectuais de ordem mais elevada (Dallazen & Scheffer, 2003; Ponte & Canavarro, 1997). Como instrumento mediador no processo de decisões, permite que o aluno participe de forma ativa no processo de ensino-aprendizagem (Ponte & Canavarro, 1997). Proporciona também aos alunos momentos de discussão (Gracias & Borba, 2000; Ponte & Canavarro, 1997) e de partilha de ideias (Ponte & Canavarro, 1997). O Ministério da Educação (2004) refere também algumas utilidades da calculadora gráfica:

> obter rapidamente uma representação do problema, de um conceito, a fim de lhe dar sentido e favorecer a sua apropriação pelo estudante; ligar aspetos diferentes (gráfico, numérico e algébrico) de um mesmo conceito ou de uma mesma situação; explorar situações fazendo aparecer de forma dinâmica diferentes configurações; proceder de forma rápida à verificação de certos resultados (Ministério da Educação, 2004, p. 6).

Apesar das várias vantagens da utilização da calculadora gráfica, são sentidas, pelos alunos, algumas dificuldades associadas às características desta tecnologia. As dificuldades surgem, entre outras, na interpretação do gráfico (Goldenberg, 1988, cf. Hodges e Kissane, 1994; citado por Rocha, 2002b), na introdução da informação na calculadora (Boers e Jones, 1994; citado por Rocha, 2002b) e na compreensão da relação existente entre a forma do gráfico e a janela de visualização utilizada (Hector, 1992, cf. Hodges e Kissane, 1994; citado por Rocha, 2002b). As reduzidas dimensões do ecrã da calculadora (Goldenberg, 1988, cf. Hodges e Kissane, 1994; citado por Rocha, 2002b), a reduzida resolução do ecrã (Hector, 1992; Hodges e Kissane, 1994; citado por Rocha, 2002b) e a ausência de indicação, no próprio gráfico, da escala que está a ser utilizada (Ruthven, 1996; citado por Rocha, 2002b) são também dificuldades apresentadas pelos alunos.

Vários estudos foram realizados no âmbito da utilização da calculadora gráfica e vários resultados foram analisados. No estudo realizado por Rocha (2001), os alunos tendem a utilizar a calculadora gráfica nas situações em que foram ensinados a fazê-lo e destacam-se as seguintes utilizações: elaboração de gráficos, resolução de equações e de inequações e confirmação de cálculos aritméticos e de resultados. Doerr e Zangor (2000) referem que calcular, estimar, arredondar, alterar a natureza da tarefa, analisar e recolher dados, controlar fenómenos encontrando padrões, encontrar funções simbólicas, exibir e interpretar dados, resolver equações, confirmar conjeturas são as utilizações mais frequentes da calculadora gráfica. Rocha (2004) salienta que as dimensões reduzidas do ecrã da calculadora gráfica, que podem suscitar distorções no gráfico apresentado, e a falta de compreensão na correspondência entre a forma do gráfico e a janela de visualização são algumas dificuldades com que os alunos se deparam. Salienta também que os alunos apresentam dificuldades ao nível da interpretação dos gráficos. Rocha (2002b) refere que os alunos tendem a utilizar, ao nível do cálculo, a calculadora gráfica de uma forma análoga à que utilizavam a calculadora científica, que uma das grandes dificuldades sentidas pelos alunos é relativa à escolha da janela de visualização do gráfico e que os alunos recorrem essencialmente à calculadora gráfica para traçar gráficos e resolver equações/inequações. Albergaria e Ponte (2008) observam que os alunos, na realização das tarefas, que privilegiam o uso da calculadora gráfica, revelam um sentido crítico mais apurado relativamente aos resultados obtidos e às operações utilizadas e que centram a sua atenção na tarefa, reduzindo, deste modo, os erros de cálculo e de interpretação. No estudo realizado por Consciência (2013), os alunos também tendem a utilizar a calculadora gráfica nas situações em que foram ensinados a fazê-lo e destacam-se as seguintes utilizações: representação de funções graficamente, resolução de equações e inequações graficamente, determinação das coordenadas de pontos, representação gráfica da função derivada de uma função, determinação do valor da derivada de uma função num ponto, confirmação de resultados obtidos por via algébrica e exploração de situações problemáticas. Neste estudo, os alunos demonstram dificuldades relativamente à compreensão e interpretação de determinadas limitações relativas à representação gráfica e à escolha de uma janela de visualização apropriada e as mensagens de erro devolvidas pela calculadora gráfica nem sempre são descodificadas pelos alunos. A mesma autora refere que os alunos raramente alteram a janela de visualização de modo a focarem melhor a zona da representação gráfica e que a calculadora gráfica permite uma rápida conversão entre representações, facilitando a escolha da representação que melhor permitirá aos alunos resolver determinado problema, incentivando desta forma a exploração de situações problemáticas.

Os estudos referidos mostram diferentes utilizações da calculadora gráfica assim como algumas dificuldades e limitações apresentadas pelos alunos. Segundo Rocha (2011a), o tipo de tarefas que os professores escolhem trabalhar e envolver os alunos é determinante na utilização que estes farão da calculadora gráfica. A preparação do professor influencia a forma como ensina e como estimula o manuseamento da calculadora gráfica, considerando as suas potencialidades e as suas limitações (Doerr & Zangor, 2000). É necessário explorar a matemática com a calculadora, tendo em consideração que integrar a calculadora no processo de ensino-aprendizagem da matemática não é só ensinar como funcionam os comandos (Rocha, 2002a).

Assim, conhecendo as vantagens, limitações e dificuldades na utilização da calculadora gráfica, o professor pode integrá-la eficientemente no processo de ensino-aprendizagem e criar oportunidades de aprendizagem enriquecedoras (Guin & Trouche, 1999; Garcias & Borba, 2000).

Capítulo 3. Metodologia e contexto do estudo

3.1. Opções metodológicas

O presente estudo foi realizado com alunos de uma turma do 11.º ano do ensino profissional de uma escola dos Açores, tendo como objetivo averiguar como estes resolvem problemas de Programação Linear. Mais especificamente, pretende-se analisar e compreender:

i) Como é que os alunos analisam e interpretam o enunciado de problemas de Programação Linear?

ii) Quais as estratégias adotadas pelos alunos na resolução de problemas de Programação Linear?

iii) Como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de problemas de Programação Linear?

iv) Como interagem os alunos entre si e com a professora na resolução de problemas de Programação Linear?

Visto que se pretendia analisar uma situação específica e bem delimitada e conhecer como a realidade é vista pelos alunos intervenientes, a metodologia adotada foi de caráter qualitativo e interpretativo, privilegiando-se o estudo de caso.

Pretendia-se obter dados ricos em pormenores descritivos como forma de compreender e interpretar os factos na sua complexidade e não obter dados passíveis de generalização. Bogdan e Biklen (1994, pp. 47-50) identificam cinco características que uma investigação qualitativa deve possuir: "(1) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal (…); (2) a investigação qualitativa é descritiva (…); (3) os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos (…); (4) os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva (…); e (5) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa".

Optou-se pelo estudo de caso visto que, e segundo Ponte (2006, p. 106), esta é uma opção adequada quando se trata de "uma investigação que se assume como particularística, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única ou especial, pelo menos em certos aspetos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global de um certo fenómeno de interesse".

3.2. Recolha de dados

A recolha de dados baseou-se na observação participante das aulas, na recolha das resoluções efetuadas pelos participantes nas aulas, nas notas de campo elaboradas pela investigadora e num questionário realizado no final do estudo. As notas de campo tiveram como principal intenção conseguir um registo de tudo o que a investigadora ouviu, observou e experienciou. Para complementar a informação recolhida, efetuou-se ainda um registo áudio.

Esta diversidade de instrumentos permitiu recolher elementos diferenciados e potenciou uma maior fundamentação das conclusões (Bogdan & Biklen, 1994).

A análise de dados baseou-se nas resoluções efetuadas pelos três pares de alunos conjugada com os registos da gravação em áudio e com as notas elaboradas pela investigadora. A investigadora tentou assim compreender como os alunos pensam, os seus modos de trabalho e o raciocínio desenvolvido (Bogdan & Biklen, 1994).

Com os elementos recolhidos através do questionário, pretendeu-se aferir a opinião dos alunos acerca das aulas que envolveram a aplicação dos problemas de Programação Linear. A opção por este instrumento de recolha de dados teve como intenção minimizar o impacto da investigação sobre a opinião dos alunos, no entanto esta opção condicionou o aprofundamento dessas opiniões.

O questionário aplicado foi desenvolvido especificamente para este estudo e é constituído por questões de resposta fechada, nas quais os alunos optavam por um de quatro itens (“Discordo totalmente”, “Discordo”, “Concordo”, “Concordo plenamente”), e questões de resposta aberta, nas quais os alunos poderiam responder livremente (ver anexo IV).

3.3. Intervenientes na ação

A turma a que pertenciam os participantes no estudo era heterogénea, constituída por onze rapazes e três raparigas. Embora alguns alunos fossem um pouco agitados e não revelassem interesse e motivação pela disciplina, esta era uma turma agradável, com comportamento adequado, onde era fácil ao professor concretizar o trabalho planeado. Apesar das grandes lacunas ao nível de conhecimentos e da pouca curiosidade pela disciplina, os alunos, na sua maioria, compreendiam os conceitos no momento em que eram lecionados, embora, por vezes, não os assimilassem devido à falta de trabalho extra-aula.

A investigadora, na tentativa de estudar raciocínios distintos e verificar se os alunos com maior sucesso a matemática compreendem os enunciados e mobilizam outros procedimentos para a resolução de problemas, considerou que seria pertinente a escolha dos intervenientes de acordo com os seus níveis de conhecimentos e motivações. Foram assim selecionados três pares de alunos considerando o seu nível de desempenho em matemática e o seu interesse pela disciplina.

De forma a salvaguardar a privacidade dos alunos, a investigadora nomeou os três pares de alunos escolhidos como par AB, par CD e par EF, sendo o par AB aquele que demonstra ter melhor nível de desempenho e interesse pela disciplina e o par EF o que revela mais dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos e menos interesse em relação à disciplina. Numa escala de classificação de 0 a 20 valores, as notas dos alunos do par AB eram geralmente superiores a 16 valores, as dos alunos do par CD variavam entre 13 e 16 valores e as dos alunos do par EF eram geralmente inferiores a 13 valores.

3.4. Contexto do estudo

O estudo incidiu na análise detalhada da resolução de duas tarefas propostas a três pares de alunos, com diferentes classificações e motivações pela disciplina, com idades compreendidas entre os 16 e os 19 anos.

Os problemas propostos para as aulas abordavam conteúdos ligados a um contexto real, para que os mesmos tivessem significado para os alunos. Os alunos realizaram as tarefas em pares, formados pela professora, com recurso à calculadora gráfica, tendo a respetiva resolução sido áudio gravada.

As aulas de implementação das tarefas centraram-se no trabalho dos alunos e, enquanto estes resolviam as tarefas, a professora intervinha, esclarecendo eventuais dúvidas de interpretação, levantando questões pertinentes para redirecionar os alunos e corrigindo alguns erros de resolução. Tentava ainda compreender os modos de trabalho e o raciocínio desenvolvido pelos alunos, procurando ter presente que o pretendido era que resolvessem os problemas propostos pelos seus próprios meios.

Antes da aplicação das tarefas do estudo, foram reservados 10 tempos de 45 minutos para introduzir a Programação Linear. Nestas aulas, os alunos foram ensinados a definir analiticamente conjuntos de pontos no plano, a representar geometricamente conjuntos de pontos definidos por condições no plano, a representar graficamente regiões admissíveis, a calcular as coordenadas dos vértices dessas regiões e a determinar as coordenadas do vértice em que a função objetivo atinge um máximo ou um mínimo.

Seguem-se exemplos de exercícios resolvidos durante estas aulas, adaptados de Ferreira, Ferreira, Carvalho e Carvalho (2010):

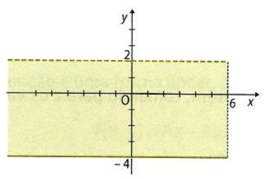
1. Num referencial cartesiano ortogonal e monométrico do plano, represente o conjunto de pontos definido por cada uma das condições:

a) $x > -1 \wedge y \leq 3$ **b)** $x \leq 2 \wedge y < x$

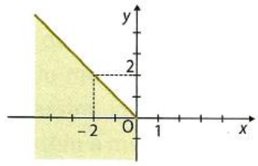
c) $y \leq 4 \wedge y \geq -4$ **d)** $y < -2x + 2 \wedge y \leq 4$

2. Defina analiticamente o conjunto de pontos a sombreado.

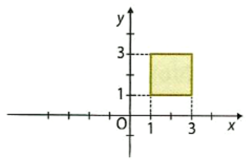
a)



b)



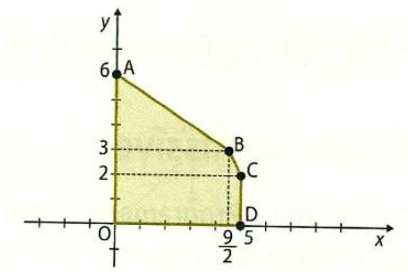
c)



3. Considere a figura ao lado.

a) Defina por um sistema de inequações lineares a região admissível relativa a um problema de Programação Linear.

b) Sendo a função objetivo definida por $f(x, y) = 3x + 5y$, determine as coordenadas do vértice da região admissível, em que f atinge o valor máximo.



4. Considere o seguinte sistema de inequações $\begin{cases} y \leq -x+120 \\ 3y-x \leq 0 \\ x \leq 100 \\ y \geq 10 \end{cases}$.

a) Represente graficamente a região admissível e calcule as coordenadas dos seus vértices.

b) Em que vértice é que a função definida por $f(x,y)=8x+12y$ alcança o seu valor mínimo?

Para a aplicação das tarefas e para a formalização do método de resolução de problemas de Programação Linear, foram reservados 5 tempos de 45 minutos.

O quadro seguinte esquematiza as atividades desenvolvidas neste estudo:

Quadro 3.1: Planificação das atividades desenvolvidas neste estudo.

Datas	*N.º de aulas de 45 minutos*	*Atividades desenvolvidas*
De 6 a 24 de maio	10	Os alunos foram ensinados a definir analiticamente conjuntos de pontos no plano, a representar geometricamente conjuntos de pontos definidos por condições no plano, a representar graficamente regiões admissíveis, a calcular as coordenadas dos vértices dessas regiões e a determinar as coordenadas do vértice em que a função objetivo atinge um máximo ou um mínimo.
27 de maio	2	Foram aplicadas as duas partes, 1A (anexo I) e 1B (anexo II), da tarefa 1.
31 de maio	2	De forma a esclarecer dúvidas e a facilitar a organização de ideias que surgiram durante a realização da tarefa 1, a professora apresentou uma possível resolução da tarefa, alertando para as diferentes alternativas de resolução de algumas etapas. Informou que, por exemplo, os alunos poderiam ter determinado os vértices da região admissível pelo método algébrico (resolvendo equações) ou pelo método gráfico (utilizando os comandos da calculadora gráfica) e que também poderiam ter encontrado a solução ótima pelo método algébrico (determinando o valor máximo da função objetivo em cada vértice da região admissível) ou pelo método gráfico (traçando retas de nível paralelas à reta de nível zero, até ao último ponto de contacto com a região admissível, no sentido de crescimento), relembrando o que foi feito nas aulas de introdução à Programação Linear.

		Houve um diálogo com os alunos sobre a diferença das resoluções apresentadas nas tarefas 1A e 1B e estes concluíram que o método de resolução de problemas de Programação Linear apresentado na tarefa 1B é mais eficaz, embora trabalhoso, na procura da solução ótima.
3 de junho	1	Foi aplicada a tarefa 2 (anexo III).
7 de junho	1	Foi aplicado o questionário final.

3.5. Caracterização das tarefas

Os problemas apresentados refletiram situações ligadas à realidade da ilha onde os alunos vivem e foram trabalhados no âmbito do estudo da Programação Linear, surgindo no contexto do programa da disciplina.

A tarefa 1 (subdividida em duas tarefas 1A e 1B) foi aplicada no dia 27 de maio e realizada a pares, formados pela investigadora, por todos os alunos da turma. Foram necessários 45 minutos para a execução de cada uma das partes.

Os alunos tiveram o primeiro contacto com os problemas de Programação Linear com a resolução da tarefa 1A e pretendia-se que estes, através das suas próprias estratégias de resolução, encontrassem a solução do problema proposto.

A tarefa 1B é uma orientação para a resolução do problema, já conhecido pelos alunos aquando da realização da tarefa 1A. Com esta tarefa, pretendeu-se introduzir o método de resolução de problemas de Programação Linear e, para encontrarem a solução ótima, os alunos tinham de resolver as etapas propostas.

Nas duas aulas seguintes, de forma a esclarecer dúvidas e a facilitar a organização de ideias que surgiram durante a realização da tarefa 1, a professora apresentou uma possível resolução da tarefa, alertando para as diferentes alternativas de resolução de algumas etapas.

Na aula de aplicação da tarefa 2, dia 3 de junho, com a duração de 45 minutos, a professora apresentou mais um problema representativo de uma situação real para que os alunos resolvessem, desta vez, através do método. Pretendia-se que os alunos aplicassem os conhecimentos matemáticos relativos à Programação Linear de forma a resolver o problema proposto e, também, que reconhecessem o contributo da matemática para uma melhor tomada de decisões.

3.6. Fases do estudo

O presente estudo realizou-se entre abril de 2016 e março de 2017 e passou por três fases:

Fase 1: Revisão da literatura, definição da metodologia e preparação dos instrumentos para a recolha dos dados.

Fase 2: Recolha de dados.

Fase 3: Análise dos dados recolhidos e elaboração do relatório escrito.

Na primeira fase, efetuou-se uma pesquisa com o intuito de sustentar teoricamente o objetivo e as questões deste estudo, delineou-se a metodologia de investigação a adotar e escolheram-se os instrumentos para a recolha de dados. Na fase dois, aplicaram-se as tarefas e o questionário aos alunos. Na terceira fase, analisaram-se os dados recolhidos e foram elaboradas as conclusões do estudo.

Capítulo 4. Apresentação e análise dos dados

Neste capítulo pretende-se descrever e analisar os dados recolhidos com a aplicação das tarefas propostas e com a realização do questionário final, comparando os resultados obtidos com os três pares de alunos.

Numa tentativa de esclarecer as interações geradas nas aulas e descrever a forma como estas ocorreram, apresentam-se alguns excertos de diálogos estabelecidos aquando a aplicação das tarefas.

4.1. Par AB (formado pelo aluno A e pelo aluno B)

4.1.1. Breve caracterização dos alunos do par AB

Os alunos do par AB são bastante atentos, curiosos e interessados em acompanhar os conteúdos lecionados. Participam nas aulas de forma espontânea e não hesitam em esclarecer as suas dúvidas. Revelam grandes capacidades ao nível da aprendizagem e as suas intervenções são, normalmente, bastante pertinentes.

Para estes alunos, a matemática é uma disciplina muito interessante, difícil e que exige trabalho e dedicação. Consideram que estudar matemática permite melhorar as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas e que é uma disciplina fundamental para entender o mundo e nele viver.

4.1.2. Desempenho do par AB na tarefa 1A

Na resolução da tarefa 1A, os alunos do par AB leram atentamente o enunciado do problema e, após uma primeira análise, retiraram e organizaram as informações que consideraram importantes para a resolução do mesmo. Tiveram também em consideração as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha para a confeção da doçaria:

> *Aluno A:* Biscoitos de orelha e cavacas… Depois escreves aí… 1 kg dá um lucro de 5 €.
> Depois, biscoitos de orelha. 1 kg de biscoitos dá 7 € de lucro.
> Dispõe de 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha.
> Cada kg de cavacas leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg, 200 gramas de farinha e 1 kg de biscoitos leva 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha.

Os alunos perceberam que o que se pretendia era procurar as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a fabricar, de modo a obter o maior lucro possível:

> *Aluno A:* Agora a pergunta "Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível?" Temos isto para fabricar o máximo possível [referindo-se às quantidades disponíveis].

Elaboraram uma estratégia de resolução baseada na tentativa e erro, utilizando a calculadora gráfica para efetuar os cálculos aritméticos. Procuraram encontrar valores possíveis para a produção de biscoitos de orelha e de cavacas, tendo em conta as quantidades disponíveis, não se preocupando, de imediato, com o lucro obtido nessa produção:

Aluno A: A gente vai tentar mais ou menos…
Aluno B: E o lucro?
Aluno A: Isso depois a gente faz… por agora deixa de parte. Temos de ver quanto é que podemos fazer de cavacas e quanto podemos fazer de biscoitos para usar isto que está aqui [referindo-se às quantidades disponíveis].

Os alunos, de seguida, pensaram que o melhor seria dividir as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis, ou seja, utilizar metade da quantidade de açúcar para confecionar os biscoitos de orelha e a outra metade para confecionar as cavacas, assim como utilizar metade da quantidade de farinha para confecionar os biscoitos de orelha e a outra metade para confecionar as cavacas. Tinham, portanto, disponíveis 5 kg de açúcar e 3 kg de farinha para cada tipo de doçaria:

Aluno A: O que podemos tentar fazer é dividir o açúcar metade/metade e a farinha metade/metade.

No entanto, quando pretendiam determinar quantos quilogramas de cavacas poderiam fabricar com 5 kg de açúcar, fizeram o raciocínio contrário, determinando a quantidade de açúcar necessária ao fabrico de 5 kg de cavacas, pela regra de três simples, e utilizando a calculadora gráfica para efetuar os cálculos:

Aluno B: 1 kg de cavacas leva 0,4 kg de açúcar.
Aluno A: Então 5 kg vai levar x.
Aluno B: x é igual a 5 vezes 0,4 a dividir por 1 que dá 2.
Aluno A: Dá para fazer 2 kg. Então em cada 5 kg de cavacas a gente usa 2 kg de açúcar.

Analogamente, os alunos determinaram a quantidade de farinha necessária à produção de 5 kg de cavacas:

Aluno A: Vamos tentar ver quanto é que a gente precisa de farinha.
Aluno B: Temos de fazer através do mesmo [referindo-se à regra de três simples].

Entretanto, os alunos são interrompidos pela professora quando esta verificava se havia dúvidas e se estavam a interpretar o problema de forma correta. Aproveitaram para resumir o que tinham feito até ao momento e para informar o que pretendiam fazer:

Professora: Expliquem-me o problema.
Aluno A: Temos de descobrir a quantidade de biscoitos e de cavacas que conseguimos fazer com os kg de açúcar e de farinha que temos. Mas temos de utilizar os quilos todos?
Professora: O máximo possível.
Aluno A: Por exemplo, para 5 kg de cavacas conseguimos dizer que precisamos de 2 kg de açúcar e vamos descobrir de farinha. Vamos descobrir quanto precisamos para 5 kg de biscoitos.
Professora: Não precisam de confecionar 5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos… podem ser quantidades diferentes.

Após a intervenção da professora, os alunos não alteraram a sua estratégia de resolução e continuaram o seu raciocínio, calculando a quantidade de farinha necessária à produção de 5 kg de cavacas:

Aluno A: Então vamos à farinha.

Aluno B: Se 1 kg está para 0,2 kg, 5 kg está para x. x é igual a 5 vezes 0,2 a dividir por 1 que dá 1.
Aluno A: Utiliza-se 1 kg. Para 5 kg de cavacas utiliza-se 1 kg de farinha.

De seguida, fizeram o mesmo raciocínio para determinar a quantidade de açúcar necessária à produção de 5 kg de biscoitos de orelha.

Referiram que a quantidade de biscoitos de orelha deveria ser maior do que a quantidade de cavacas, uma vez que o lucro também é maior e calcularam a quantidade de açúcar utilizada em ambos os tipos de doçaria:

Aluno A: A gente vai ter de fazer mais biscoitos do que cavacas. Vamos tentar também com 5 kg e depois diminuímos ou aumentamos, consoante aquilo que vai gastar, num ou noutro.
Aluno B: Então 1 kg leva 0,2 kg de açúcar, 5 kg vai gastar 1 kg de açúcar.
Aluno A: Então se em cavacas gastamos 2 kg de açúcar e em biscoitos 1 kg, temos 3 kg, resta-nos 7 kg!

Como verificaram que a quantidade de açúcar utilizada era bastante inferior à disponível, decidiram aumentar a quantidade de biscoitos de orelha (uma vez que o lucro é maior na produção de biscoitos de orelha) para 8 kg:

Aluno A: Vamos fazer mais quilos de biscoitos, uns 8. Não precisamos de mais cavacas, agora vamos aumentar os biscoitos. Conseguimos fazer alterando apenas a quantidade de biscoitos.
Aluno B: 8 vezes 0,2 a dividir por 1 dá 1,6.

Os alunos ficaram surpresos com a quantidade de açúcar necessária ser ainda reduzida e, a partir deste momento, preocuparam-se em encontrar as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas que permitissem utilizar os 10 kg de açúcar.

Calcularam a quantidade de açúcar para confecionar 15 kg de biscoitos de orelha e 10 kg de cavacas e verificaram que utilizavam apenas 7 kg, restando ainda 3 kg:

Aluno A: Uau… Isso vai dar para fazer um monte de biscoitos!
15 kg vezes 0,2 a dividir por 1 dá 3 kg. Ainda resta açúcar!
Vamos agora fazer para as cavacas. Tentamos com 10 kg: 10 kg vezes 0,4 a dividir por 1 dá 4 kg. 4 mais 3 dá 7.
Aluno B: Faltam 3 kg [para os 10 disponíveis].

De seguida, calcularam a quantidade de açúcar para a produção de 12 kg de cavacas e, verificando que ainda era insuficiente, calcularam para 15 kg. Com esta produção, verificaram que ainda restava 1 kg:

Aluno A: Vamos experimentar com 12.
Aluno B: 12 vezes 0,4 dá 4,8 kg.
Aluno A: 4,8 mais 3 vai dar mais ou menos 8. Estamos mais ou menos lá. Vamos experimentar com 15 kg.
Aluno B: 15 vezes 0,4 dá 6. Ainda resta 1 kg.

Decidiram manter a quantidade de biscoitos de orelha (15 kg) e aumentar a quantidade de cavacas 17 kg:

Aluno A: Vamos experimentar para que dê mais 1 kg. 17?
A gente vai aumentar é aqui [referindo-se às cavacas]. 15 kg em cima [referindo-se aos biscoitos] e 17 em baixo [referindo-se às cavacas].
17 vezes 0,4 dá 6,8 kg que a gente usa de açúcar. O açúcar está quase!

Verificaram que a quantidade de açúcar utilizada estava muito próxima da quantidade disponível e aumentaram a produção de biscoitos de orelha para 16 kg:

Aluno B: 16 vezes 0,2 dá 3,2.
Aluno A: 3,2 com 6,8 vai dar os 10!
Aluno B: O açúcar está feito.

Com a produção de 16 kg de biscoitos de orelha e de 17 kg de cavacas, a quantidade de açúcar disponível é utilizada na totalidade. De seguida, decidiram calcular a quantidade de farinha a utilizar, com a produção dos 16 kg de biscoitos de orelha e dos 17 kg de cavacas, para verificar se não ultrapassava os 6 kg disponíveis. Referiram que, caso tal não acontecesse, teriam de ajustar as quantidades de doçaria produzidas às quantidades de açúcar e de farinha disponíveis:

Aluno A: O açúcar está… agora a gente não sabe se a farinha vai dar certo com os mesmos kg. Se o açúcar der, a farinha vai ter de dar… ou a gente vai ter de arranjar uma maneira da farinha e o açúcar dar…
Aluno B: Temos 6 kg de farinha.
Aluno A: Temos 17 kg de cavacas. 17 vezes 0,2 dá 3,4 kg, ou seja, os biscoitos só podem utilizar 2,6. Se der mais de 2,6 estamos feitos. Experimenta…
Aluno B: 16 vezes 0,3 dá 4,8.
Aluno A: Oh! A farinha não dá!

Verificaram, de seguida, que a quantidade de farinha a utilizar ultrapassava a disponível em 2,2 kg:

Aluno A: 2,6 para 4,8… Vamos ter de equilibrar isto. Temos farinha a mais. 4,8 menos 2,6 dá 2,2. Temos a mais 2 quilos e 200 gramas.

Decidiram diminuir a quantidade produzida de cavacas para 15 kg (mantendo os 16 kg de biscoitos de orelha) e calcularam a quantidade de açúcar necessária à sua produção:

Aluno A: 15 vezes 0,4 dá 6 kg de açúcar para as cavacas. 6 mais 3,2 dá 9,2 e já tiramos açúcar.

Calcularam, depois, a quantidade de farinha necessária, tendo em atenção que só dispunham de 6 kg:

Aluno A: Agora a farinha… a farinha aqui vai gastar menos… 15 vezes 0,2 dá 3 kg.
Aluno B: 16 vezes 0,3 dá 4,8.
Aluno A: Dá um total de 7,8… temos ainda de diminuir!

Após verificarem que ultrapassavam a quantidade de farinha disponível, calcularam a quantidade necessária à produção de 14 kg, 13 kg e 10 kg de biscoitos de orelha, diminuindo as quantidades quando verificavam que tinham ultrapassado os 6 kg de farinha disponíveis.

Concluíram que com 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos de orelha, utilizavam a totalidade de farinha:

Aluno A: E com 14? 14 vezes 0,3 dá 4,2. Então com 13 Kg! Fazemos com 13 kg.
Aluno B: 13 vezes 0,3 dá 3,9.
Aluno A: Não pode ser! 3,9?!?
10 vezes 0,3 dá 3. Vai ter de ser assim… 10 kg.

Após calcularem a quantidade de farinha, foram verificar se a quantidade de açúcar disponível era suficiente para a produção encontrada:

Aluno B: Para 10 kg de biscoitos, gasta-se 3 kg de farinha.
Aluno A: Agora vamos ver o açúcar, 10 vezes 0,2 dá 2 kg. 15 vezes 0,4 dá 6 kg.

Depois de verificarem as quantidades de açúcar, voltaram a ler a questão inicial, organizaram os dados com as quantidades produzidas e disponíveis e calcularam o lucro obtido com essa produção. Os alunos consideraram que a melhor solução era produzir 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos de orelha. Com esta produção, utilizou-se toda a farinha disponível, restando apenas 2 kg de açúcar:

> *Aluno A:* Esta parte está, agora vamos ver o que pede. Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível?
> O lucro… agora temos de ver o lucro!
> Já sabemos que com as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha conseguimos 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos. Vai restar 2 kg de açúcar e nada de farinha.
> Agora temos de ver o que vai dar de lucro. Qual é o lucro que ela consegue tirar com 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos… eu acho que é isso que pergunta aqui…
> Se 1 kg de cavacas vai-nos dar 5 €, vamos calcular quantos euros 15 kg nos vai dar de lucro.
>
> *Aluno B:* 15 vezes 5 dá 75 €.
>
> *Aluno A:* Ok… nas cavacas, 15 kg consegue-se 75 € de lucro. Agora vamos aos biscoitos. Cada kg de biscoitos dá um lucro de 7 €.
>
> *Aluno B:* 10 vezes 7 dá 70 €.
>
> *Aluno A:* Com 10 kg de biscoitos consegue-se um lucro de 70 €.

Sentiram necessidade de informar a professora das opções tomadas até ao momento:

> *Aluno A:* Achamos que já terminamos… Com 15 kg de cavacas, gastamos 6 kg de açúcar e 3 kg de farinha. Tentamos equilibrar… pelas nossas contas resta 2 kg de açúcar. E com 10 kg de biscoitos gastamos 2 kg de açúcar e 3 kg de farinha.
>
> *Professora:* Se é a vossa melhor solução, está ótimo! As quantidades dão para os dois?
>
> *Aluno A:* Sim. Só nos resta 2 kg de açúcar.

Os alunos, após o diálogo com a professora, organizaram a resposta e responderam ao inicialmente pedido:

Cavacas: 1 kg cavacas dá 5 euros de lucro

Cada 1 kg de cavacas leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha

Dispõe de 10 kg de açúcar, 6 kg de farinha

Açúcar

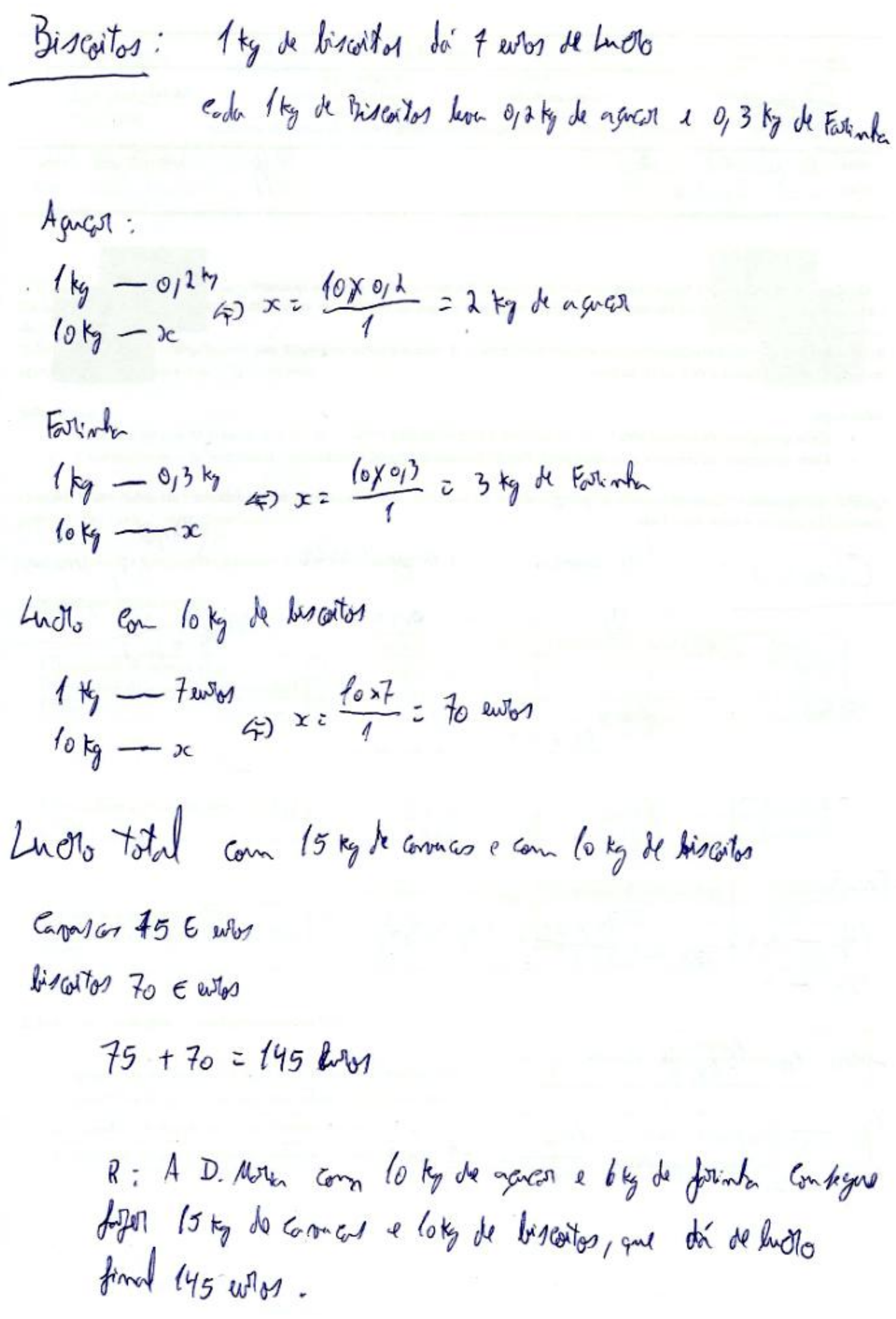
1 kg — 0,4
15 kg — x $\Leftrightarrow x = \frac{15 \times 0,4}{1} = 6$ kg de açúcar

Farinha

1 kg — 0,2 kg
15 kg — x $\Leftrightarrow x = \frac{15 \times 0,2}{1} = 3$ kg farinha

Lucro com 15 kg de cavacas

1 kg — 5 euros
15 kg — x $\Leftrightarrow x = \frac{15 \times 5}{1} = 75$ euros


Biscoitos: 1 kg de biscoitos dá 7 euros de lucro

cada 1 kg de Biscoitos leva 0,2 kg de açucar e 0,3 kg de Farinha

Açucar:

$$\begin{array}{l} 1\text{ kg} - 0{,}2\text{ kg} \\ 10\text{ kg} - x \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{10 \times 0{,}2}{1} = 2\text{ kg de açucar}$$

Farinha

$$\begin{array}{l} 1\text{ kg} - 0{,}3\text{ kg} \\ 10\text{ kg} - x \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{10 \times 0{,}3}{1} = 3\text{ kg de Farinha}$$

Lucro em 10 kg de biscoitos

$$\begin{array}{l} 1\text{ kg} - 7\text{ euros} \\ 10\text{ kg} - x \end{array} \Leftrightarrow x = \frac{10 \times 7}{1} = 70\text{ euros}$$

Lucro total com 15 kg de cavacas e com 10 kg de biscoitos

Cavacas 75 € euros

biscoitos 70 € euros

75 + 70 = 145 euros

R: A D. Maria com 10 kg de açucar e 6 kg de farinha consegue fazer 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos, que dá de lucro final 145 euros.

Figura 4.1: Resolução da tarefa 1A pelo par AB

Verificou-se que os alunos foram bastante empenhados na procura da solução ótima. Preocuparam-se em encontrar quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a confecionar, tendo em consideração as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha. Após terem encontrado uma possível solução ótima, calcularam o seu lucro, leram novamente o enunciado, organizaram a resposta e responderam ao inicialmente pedido.

4.1.3. Desempenho do par AB na tarefa 1B

Na resolução da tarefa 1B, os alunos leram e interpretaram o problema, já conhecido da tarefa 1A, e organizaram a informação necessária à resolução da tarefa proposta.

Numa primeira análise, sentiram dificuldades no preenchimento da primeira tabela da etapa 1, no entanto, após uma observação mais atenta, conseguiram completar a tabela. Necessitaram, contudo, que a professora verificasse se estavam no caminho certo.

A calculadora foi utilizada na confirmação de resultados (até mesmo dos mais imediatos).

Aluno A: Ui… não percebo isto!
Ah… a professora já meteu aqui os kg e o lucro. Ok!
1 kg de cavacas gasta 400 gramas de açúcar e 200 gramas de farinha… é para colocar aqui [referindo-se à tabela].
Vamos perguntar à professora se é mesmo isso…
Professora nós aqui temos de pôr a quantidade gasta com 1 kg não é? Depois aqui… quantidade, quantidade e aqui? [referindo-se ao lucro].
Professora: Quanto ganha com 1 kg de cavacas?
Aluno A: 5 €.
Professora: Então coloca na tabela.
Aluno B: E aqui metemos só o total ou os cálculos?
Aluno A: 5 €… biscoitos são 7 € não é? Então 12 €.
1 kg de cavacas quanto de açúcar é que gasta?
Aluno B: 400.
Aluno A: 0,4 kg e de farinha?
Aluno B: 0,2.
Aluno A: E os biscoitos quanto levam de açúcar?
Aluno B: 0,2. E de farinha 0,3.
Aluno A: No total, quanto é que vamos gastar? Faz aí a conta por favor [referindo-se à calculadora].
Aluno B: 0,4 mais 0,2 é 0,6.
Aluno A: E a farinha vai-nos dar 500 g.
Mete aí [referindo-se à calculadora] 7 € mais 5 € que é o lucro.
Aluno B: 12.

No preenchimento da segunda tabela, usaram uma regra de três simples para calcular as quantidades de açúcar e de farinha usadas na confeção de 2 kg de cavacas e de 3 kg de biscoitos de orelha:

Aluno A: E agora? [referindo-se ao preenchimento da segunda tabela]
Aluno B: Agora é para 2 kg.
Aluno A: Então se 1 kg dá para 0,4, 2 kg dá para x. 2 vezes 0,4 é igual a 0,8.
Aluno B: Agora a farinha já é 0,2.
Aluno A: Então 2 vezes 0,2 é 0,4 e 2 kg vai-nos dar 10 € [referindo-se ao lucro].
Agora vamos fazer para 3 kg, não para 2.
Aluno B: 3 vezes 0,2 é 0,6 e 3 vezes 0,3 é 0,9.
Aluno A: Então de lucro temos 7 vezes 3 que dá 21.
Agora quanto é que a gente gasta aqui… [referindo-se ao total da primeira coluna na segunda tabela]
0,8 mais 0,6 dá 1,4; 0,4 mais 0,9 dá 1,3 e de lucro 31 €.

No preenchimento da terceira tabela, na passagem do concreto para o geral, os alunos solicitaram a ajuda da professora na obtenção da expressão da quantidade de açúcar para x kg de cavacas confecionadas e esta, para orientar o seu raciocínio, perguntou-lhes como obtiveram o 0,8, na segunda tabela. Os alunos conseguiram, desta forma, obter a expressão pretendida e, posteriormente, completar as duas primeiras linhas da tabela:

Aluno B: Agora aqui tem x e y...
Aluno A: Percebeste esta parte?
Aluno B: Esta parte não…

Aluno A: Professora… aqui agora tem x e y ...
Professora: Como é que chegaram ao 0,8?
Aluno A: Ah! Ok… vai dar x vezes 0,4 que dá $0{,}4x$.
Aluno B: Então aqui fica $0{,}2x$ e aqui $0{,}2x$ também.
Aluno A: $0{,}2y$! Não é?
Aluno B: Sim. E aqui $0{,}3y$.
Aluno A: Então vai-nos dar um lucro de $5x$ e $7y$.

De seguida, para completar a terceira linha da tabela, os alunos perceberam que, como os termos não são semelhantes, as expressões $0{,}4x+0{,}2y$, $0{,}2x+0{,}3y$ e $5x+7y$ não se podiam simplificar. Pediram que a professora confirmasse o raciocínio efetuado:

Aluno B: Espera aí… temos agora de fazer as contas [referindo-se à soma para completar a terceira linha]
Aluno A: Professora… aqui como é que a gente faz? Tem x e y ...
Professora: Como os termos não são semelhantes, fica a expressão…
Aluno A: Ah! Ok! Então fica $0{,}4x$ mais $0{,}2y$.
Aluno B: E agora aqui fica $0{,}2x$ mais $0{,}3y$ e aqui $5x$ mais $7y$.

Os alunos estruturaram a informação necessária e preencheram as tabelas, dando resposta à etapa 1:

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	1	0,4 kg	0,2 kg	5 euros
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	1	0,2 kg	0,3 kg	7 euros
Total		0,6 kg	0,5 kg	12 euros

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	2	0,8 kg	0,4 kg	10 euros
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	3	0,6 kg	0,9 kg	21 euros
Total		1,4 kg	1,3 kg	31 euros

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	x	0,4x	0,2x	5x
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	y	0,2y	0,3y	7y
Total		0,4x + 0,2y	0,2x + 0,3y	5x + 7y

Figura 4.2: Resolução da etapa 1, da tarefa 1B, pelo par AB

Após a etapa 1 estar concluída, seguiram para a etapa 2. Nesta etapa, os alunos não entenderam o que estava a ser questionado:

Aluno A: x toma valores positivos ou nulos e y toma valores positivos ou nulos.
Condição?!? Como é condição?
Professora não percebi nada…
Percebeste alguma coisa?
Aluno B: Nada…
Aluno A: Chama a professora…

A professora leu a frase e pediu para que os alunos a transcrevessem em linguagem matemática:

Aluno A: Professora estamos com dúvidas na linguagem.

Professora: Então como se escreve em linguagem matemática "x toma valores positivos ou nulos"?
Aluno A: Ah… ok… maior ou igual.
Professora: x maior ou igual a zero.
Aluno A: Então aqui no y é igual. y maior ou igual a zero.
Professora: Sim, mas agora cuidado. Quantidade de farinha… qual a quantidade de farinha?
Aluno A: É esta [apontando para a expressão] e tem de ser menor ou igual a seis. Está entendido também!

Os alunos escreveram, de seguida, as condições, preenchendo a tabela relativa à etapa 2:

	Condição
x (quantidade de cavacas, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$x \geq 0$
y (quantidade de biscoitos de orelha, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$y \geq 0$
A quantidade de farinha utilizada é inferior ou igual a 6 kg.	$0{,}2x + 0{,}3y \leq 6$
A quantidade de açúcar utilizada é inferior ou igual a 10 kg.	$0{,}4x + 0{,}2y \leq 10$

Figura 4.3: Resolução da etapa 2, da tarefa 1B, pelo par AB

Na resolução da etapa 3, recordaram os conceitos e os procedimentos aprendidos em aulas anteriores:

Aluno A: Estamos aqui agora…
Professora: Representem as condições.
Aluno A: Ah! Aquela coisa! Vamos ter de fazer o gráfico.
Começaram por resolver as inequações em ordem a y:
Aluno A: Então passa tudo para o lado direito.
Aluno B: $0{,}3y \leq 6 - 0{,}2x$ e aqui $0{,}2y \leq 10 - 0{,}4x$.
Aluno A: E agora vai ficar a dividir.
Aluno B: $y \leq \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$ e aqui $y \leq \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$.

Os alunos optaram pela resolução gráfica da etapa. Introduziram, na calculadora gráfica, a expressão analítica de cada função entre parênteses e só após o diálogo entre os alunos e com a professora, colocaram os parênteses apenas nos numeradores das expressões analíticas das funções:

Aluno B: As retas…
Aluno A: Temos de fazer as retas, não é?
Aluno B: Penso que é…
Aluno A: Liga essa coisa [referindo-se à calculadora gráfica].
Aluno B: Temos de colocar $6 - 0{,}2x$.
Aluno A: Entre parênteses! Abre parênteses, $6 - 0{,}2x$, dividir por 0,3, fecha parênteses, *enter*.
Aluno B: Mas não é tudo dentro de parênteses…
Aluno A: Não?
Aluno B: Quando fazes dividir não é…
Aluno A: Professora… quando fica a dividir, os parênteses fica em tudo, não é?
Aluno B: Não é fechar parênteses e depois dividir?
Professora: Sim, parênteses só no numerador.
Aluno B: Ok. Então abre parênteses, $6 - 0{,}2x$, fecha parênteses, dividir por 0,3, *enter*.
Aluno A: E agora abre parênteses, $10 - 0{,}4x$, fecha parênteses, dividir por 0,2, *enter*. Agora gráfico!

A primeira é esta [apontando para uma das funções].

Após representarem graficamente as funções na calculadora, tentaram procurar a região admissível:

Aluno A: $x \geq 0$, o x é assim.
Aluno B: Este é o y e este o x…
Aluno A: $x \geq 0$ é então para aqui. E é este triângulo! Agora vamos ver como fazer no caderno que já não sei… está muito esquisito, esta barra está muito preta…

Os alunos, mais uma vez, recordaram o que foi trabalhado em aulas anteriores e tentaram seguir os procedimentos adequados.

Inicialmente, na janela de visualização, os alunos utilizaram -20 para os valores mínimos de x e de y e 20 para os valores máximos. Como não conseguiram visualizar a região admissível, ajustaram o campo de visão alterando os valores mínimos para -60 e os valores máximos para 60, não tendo em consideração que tanto o x como o y tomam apenas valores positivos ou nulos:

Aluno A: A gente diminuiu isto… aumentou o número mas ficou assim.
Professora: Vamos tentar encontrar uma janela melhor.
Aluno 1: Estava -20, 20 e nós colocamos -60, 60.
Professora: Está bom mas vamos encontrar uma melhor.

A professora sugeriu que alterassem novamente o campo de visão para que se conseguisse visualizar com mais detalhe a região admissível. Os alunos ajustaram os valores mínimos para -20, o valor de x máximo para 40 e de y máximo para 60. É de salientar que todo o raciocínio que se descreve de seguida poderia ter sido feito com a representação efetuada inicialmente pelo par AB (considerando para valores mínimos -60 e para valores máximos 60).

Após a representação gráfica das funções, os alunos identificaram a região admissível e determinaram, através da utilização dos comandos *y-cal*, *isct* e *root* da calculadora gráfica *Casio*, as coordenadas dos vértices $(0,20)$, $(22{,}5;5)$ e $(25,0)$ do polígono obtido. Através do comando *y-cal*, determinaram o vértice de coordenadas $(0,20)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y=\frac{6-0{,}2x}{0{,}3}$ com o eixo Oy, com o comando *isct*, determinaram o vértice de coordenadas $(22{,}5;5)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y=\frac{6-0{,}2x}{0{,}3}$ e $y=\frac{10-0{,}4x}{0{,}2}$ e através do comando *root*, determinaram o vértice de coordenadas $(25,0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y=\frac{10-0{,}4x}{0{,}2}$ com o eixo Ox.

Foi necessário relembrar um dos comandos (*y-cal*) da calculadora e também houve uma intervenção da professora no sentido de sugerir uma alteração da escala nos eixos do referencial:

Aluno A: Então agora passamos o gráfico para o papel, não é?
Professora: Exatamente!
Aluno A: Mas e aqui como é que a gente sabe os números?
Professora: Tem de ser com o *y-cal.*
Aluno A: Vamos começar a desenhar!
1, 2, 3… até ao 30?!? Como é que vamos fazer até ao 30 aqui? [referindo-se ao espaço disponível na folha de resposta]
Professora: Podem fazer de 5 em 5, por exemplo.
Aluno A: Claro! 5, 10, …, 30 e agora este 5, 10, …, 50.
Os alunos trocaram as coordenadas de um dos vértices, por distração:
Aluno A: Agora aqui é $(0, 20)$, a interseção é $(22{,}5; 5)$, aqui é $(0, 0)$ e aqui $(0, 25)$ [deveria ser $(25, 0)$ em vez de $(0, 25)$].

Os alunos, de seguida, organizaram a informação recolhida na folha de resposta:

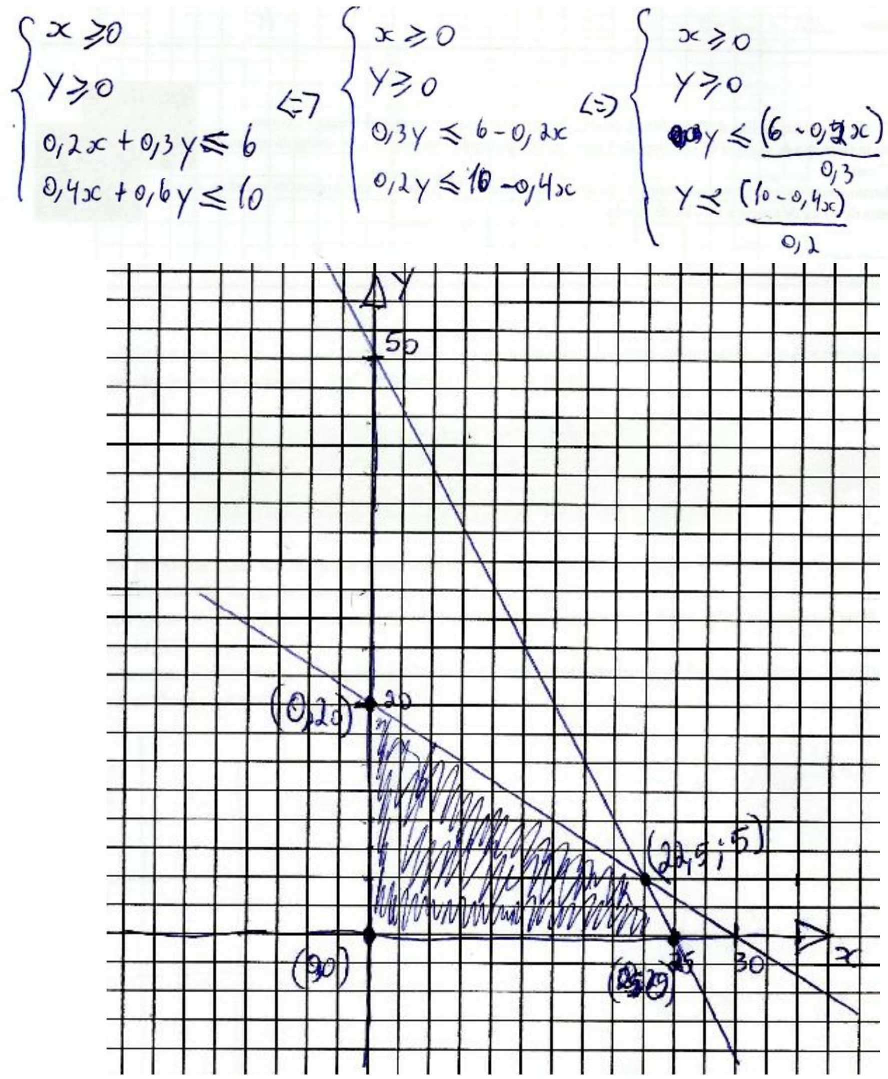


Figura 4.4: Resolução da etapa 3, da tarefa 1B, pelo par AB

Depois disto, os alunos definiram a função lucro e calcularam o seu valor em cada um dos vértices do polígono obtido.

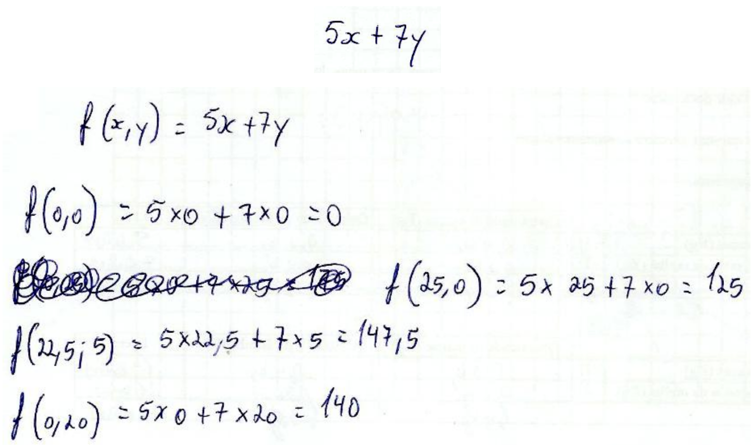
Aluno B: $5\times 0+7\times 0=0 \quad ; \quad 5\times 25+7\times 0=125$
$5\times 22{,}5+7\times 5=147{,}5 \quad ; \quad 5\times 0+7\times 20=140$

Aluno A: A etapa 5 ainda não fizemos!
Aluno B: É isto! É esta a expressão [referindo-se à função lucro] e os cálculos são estes!
Aluno A: E o 4?
Aluno B: É a expressão… $5x+7y$.
Aluno A: Vamos dizer à professora.

Solicitaram então à professora a verificação da resolução elaborada para, de seguida, responder à questão inicial. Esta, verificou que as coordenadas do vértice estavam trocadas:

Aluno B: A professora podia vir aqui ver como está isto?
Professora: Ora… a pergunta é "Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível?" Os cálculos estão corretos? Bem… aqui está trocado… nas coordenadas, primeiro é o x.

Organizaram, tendo em conta a correção feita pela professora, a resposta às etapas 4 e 5:


$5x + 7y$

$f(x,y) = 5x + 7y$

$f(0,0) = 5\times 0 + 7\times 0 = 0$

$f(25,0) = 5\times 25 + 7\times 0 = 125$

$f(22,5;\,5) = 5\times 22,5 + 7\times 5 = 147,5$

$f(0,20) = 5\times 0 + 7\times 20 = 140$

Figura 4.5: Resolução das etapas 4 e 5, da tarefa 1B, pelo par AB

Por último, depois de corrigirem o erro cometido, os alunos responderam à questão inicialmente colocada, referindo que a D. Maria com 10 kg de açúcar e com 6 kg de farinha consegue confecionar 22,5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos de orelha e obter um lucro de 147,5 €.

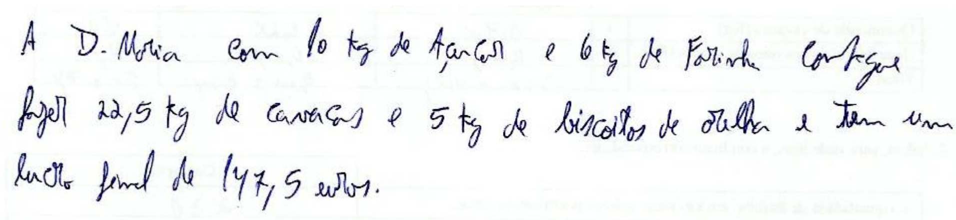

A D. Maria com 10 kg de Açucar e 6 kg de Farinha Consegue fazer 22,5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos de orelha e tem um lucro final de 147,5 euros.

Figura 4.6: Resolução da etapa 6, da tarefa 1B, pelo par AB

4.1.4. Desempenho do par AB na tarefa 2

Na resolução da tarefa 2, à semelhança da tarefa 1, os alunos revelaram alguma autonomia na sua resolução. Seguiram os procedimentos adotados na resolução da tarefa 1B (definir as variáveis e a função objetivo; identificar as restrições do problema; construir o modelo matemático; obter a solução ótima) e, assim, começaram por definir as variáveis, embora com pouco rigor (na resposta, onde se lê "marca oficial" e "marca SOL" deveria ler-se, por exemplo, "bolas da marca oficial" e "bolas da marca SOL"), e organizaram as informações que retiraram do enunciado do problema.

De seguida, procuraram calcular o valor do lucro da venda de cada tipo de bola:

Aluno B: O lucro é 14.
Aluno A: 14? É muito… não pode ser. Não estou a perceber… Aqui o 12…
Professora…
Ai Professora estou a zeros…
Professora: Esta parte está muito bem [referindo-se às variáveis].
Aluno A: Esta aqui está mal…
Professora: O que diz aqui?
Aluno A: Catorze.
Professora: O lucro é 14? Isto [apontando para o valor de venda] é o que compra e isto [apontando para o valor de compra] é o que ele vende. Quanto vai ter de lucro?
Aluno A: $14-12=2$. Então $2x$.
Professora: E na outra?
Aluno A: Três.
Aluno B: Então $3y$.

Determinaram as expressões do número total de bolas, $x+y$, e do lucro total, $2x+3y$, e organizaram os dados numa tabela:

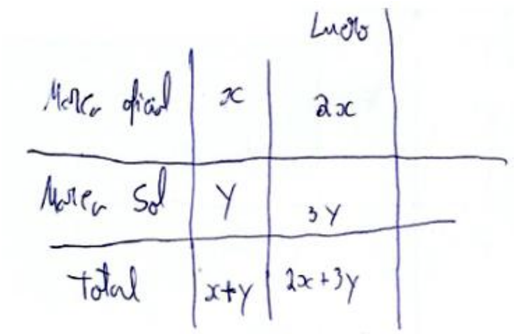


Figura 4.7: Definição das variáveis e organização dos dados da tarefa 2, pelo par AB

Após a organização dos dados, começaram a escrever as restrições do problema. Os alunos sentiram alguma dificuldade na escrita da condição "o número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial". Inicialmente escreveram $y \leq 12x$, em que 12 é o valor da compra de uma bola de marca oficial e, de seguida, quando escreveram a condição $y \leq 2x$, fizeram confusão com a expressão $2x$, relativa ao lucro do número de bolas de marca oficial. A professora interviu no sentido de orientar os alunos e permitir que estes continuassem com a resolução da tarefa:

Professora: Então agora só falta ver as condições.
Aluno A: Esta é uma delas: $x+y \leq 45$.
Professora: Muito bom. E mais?
Aluno A: $y \leq 12x$.
Professora: Doze?
Aluno A: Dois.
Professora: $2x$.
Aluno A: Mas é o número de bolas, não é?

Professora: Sim.
Aluno A: E isto é o lucro?
Professora: Não… O número de bolas da marca oficial é x. Então se queremos o número de bolas da marca oficial…
Aluno B: Fica $2x$.
Aluno A: Agora não apanhei.
Professora: O número de bolas da marca SOL é y, o número de bolas de marca oficial é x. Então se diz que o número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial…
Aluno A: Ah! O dobro… está certo.
Professora: Agora leiam com atenção o retângulo.
Aluno A: $x > 10$.
Professora: Muito bem.
Aluno A: $x > 0$ e $y \geq 0$.
Professora: Boa!

Os alunos, na escrita das restrições, não copiaram integralmente a resolução do papel de rascunho, visto que, na primeira condição, deveria ler-se $y \leq 45 - x$. O aluno A, no diálogo com a professora e com o aluno B, referiu que uma das condições seria $x > 10$ mas, no entanto, os alunos apresentaram na resposta a condição $x \geq 10$:

$$\begin{cases} x+y \leq 45 \\ y \leq 2x \\ x \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 45 \\ y \leq 2x \\ x \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Figura 4.8: Identificação das restrições do problema da tarefa 2, pelo par AB

Os alunos optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica. Começaram por introduzir as expressões algébricas das funções na calculadora gráfica e, posteriormente, identificaram a região admissível:

Aluno A: Professora, é assim?
Professora: Já têm as condições todas?
Aluno A: Falta uma aqui…
Professora: Ok. Agora pintem.
Aluno B: É para aqui…
Professora: Estás a trocar.
Aluno A: Pois… é menor.

Após a representação na calculadora, os alunos representaram a região admissível na folha de resposta e determinaram, com a ajuda dos comandos *y-cal*, *isct* e *root* da calculadora gráfica *CASIO*, as coordenadas dos vértices $(10, 20)$, $(15, 30)$ e $(45, 0)$ do polígono obtido. Com o comando *y-cal*, determinaram o vértice de coordenadas $(10, 20)$, ponto de interseção da reta de equação $x = 10$ com a função de expressão analítica $y = 2x$, com o comando *isct*, determinaram o vértice de coordenadas $(15, 30)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y = 2x$ e $y = 45 - x$ e com o comando *root*, determinaram o vértice de coordenadas $(45,0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = 45 - x$ com o eixo Ox. Houve necessidade de confirmar com a professora um dos comandos a introduzir na calculadora:

> *Aluno A:* Para saber a imagem de x temos de colocar *y-cal*?
> *Professora:* Sim.

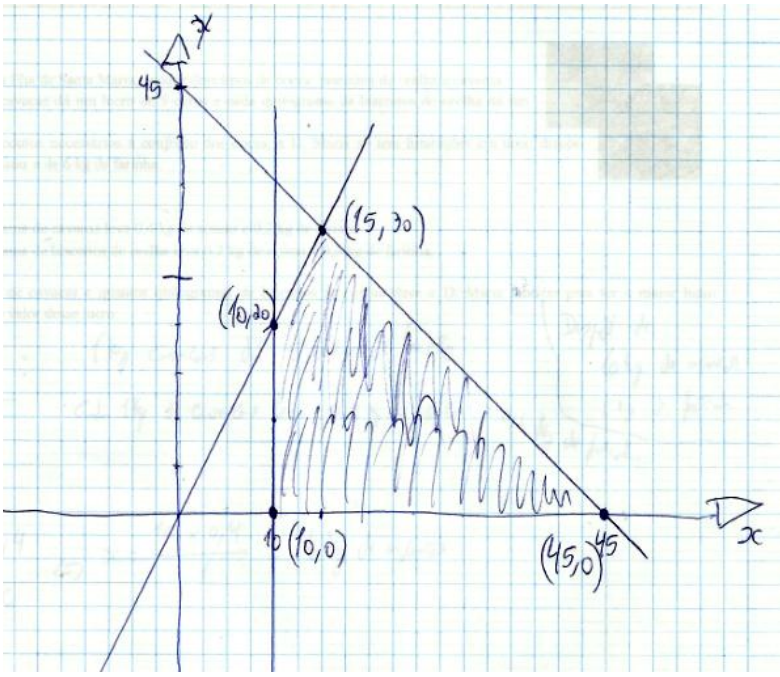


Figura 4.9: Representação da região admissível do problema da tarefa 2, pelo par AB

De seguida, definiram a função objetivo, calcularam o seu valor em cada um dos vértices do polígono e identificaram a solução ótima:

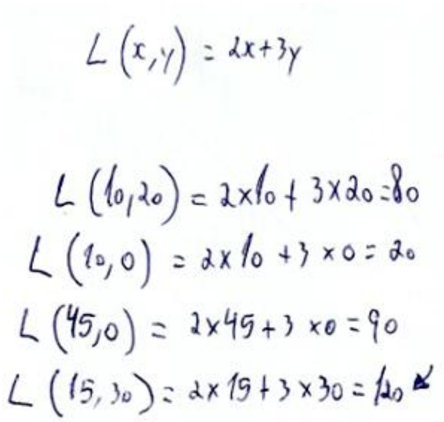


Figura 4.10: Definição da função lucro e cálculo do valor desta função em cada um dos vértices do polígono do problema da tarefa 2, pelo par AB

Após identificarem a solução ótima, os alunos deram resposta ao problema, referindo que o José tem de comprar 15 bolas de marca oficial e 30 bolas da marca SOL:

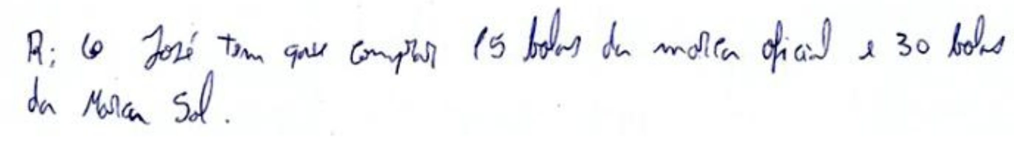

R: O José tem que comprar 15 bolos da marca oficial e 30 bolos da Marca Sol.

Figura 4.11: Interpretação dos resultados obtidos no problema da tarefa 2, pelo par AB

4.1.5. Síntese do desempenho do par AB

Na resolução da tarefa 1A, o par AB leu atentamente o enunciado, retirou e organizou os dados do problema, teve em consideração as quantidades disponíveis e compreendeu o que se pretendia com o problema.

Os alunos exploraram a tarefa fazendo tentativas de várias possibilidades para as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar pela D. Maria tendo em conta as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis, através da estratégia de tentativa e erro.

Estes alunos preocuparam-se, inicialmente, em encontrar as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar de forma a utilizar todo o açúcar disponível e, posteriormente, após encontrarem uma solução possível, verificar se a quantidade de farinha necessária era inferior ou igual à disponível. Como aferiram que a quantidade de farinha necessária à confeção da solução encontrada era superior à quantidade disponível, procuraram outras soluções possíveis, diminuindo a quantidade de doçaria a confecionar, tendo a preocupação de que as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar não fossem superiores às quantidades disponíveis.

Mais pormenorizadamente, os alunos do par AB pensaram, inicialmente, em dividir as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis, ficando com 5 kg de açúcar e 3 kg de farinha para a confeção de cada tipo de doçaria. No entanto, quando tentavam determinar a quantidade de cavacas que poderiam confecionar com 5 kg de açúcar, fizeram o raciocínio contrário e determinaram as quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 5 kg de cavacas. Determinaram também as quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 5 kg de biscoitos de orelha. Como verificaram que as quantidades que tinham disponíveis de açúcar e de farinha eram bastante superiores às quantidades utilizadas com esta produção, decidiram aumentar a confeção de biscoitos de orelha, devido ao facto do lucro destes ser mais elevado, e procuraram encontrar as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha de forma a utilizar a totalidade de açúcar disponível. Após várias tentativas (5 kg de cavacas e 8 kg de biscoitos de orelha, 10 kg de cavacas e 15 kg de biscoitos de orelha, 12 kg de cavacas e 15 kg de biscoitos de orelha, 15 kg de cavacas e 15 kg de biscoitos de orelha, 17 kg de cavacas e 15 kg de biscoitos de orelha e, por último, 17 kg de cavacas e 16 kg de biscoitos de orelha), concluíram que com a confeção de 17 kg de cavacas e 16 kg de biscoitos de orelha, necessitavam de 10 kg de açúcar (quantidade disponível) e, de seguida, determinaram a quantidade de farinha necessária a esta produção. Como verificaram que, com esta confeção, a quantidade de farinha necessária era superior à quantidade disponível, optaram por diminuir a quantidade de cavacas a confecionar e, posteriormente, diminuir também a quantidade de biscoitos de orelha a confecionar. Assim, determinaram a quantidade de farinha necessária à confeção de 15 kg de cavacas e 16 kg de biscoitos de orelha, de 15 kg de cavacas e 14 kg de biscoitos de orelha, de 15 kg de cavacas e 13 kg de biscoitos de orelha e de 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos de orelha. Os alunos diminuíram as quantidades de doçaria produzida até encontrarem quantidades que não ultrapassassem a quantidade de farinha disponível. Consideraram que a melhor solução seria confecionar 15 kg de cavacas e 10 kg de biscoitos de orelha e determinaram a quantidade de açúcar necessária a esta produção. Releram a questão inicial e calcularam o seu lucro.

Na tarefa 1A, a calculadora foi utilizada para efetuar todos os cálculos aritméticos.

Na resolução da tarefa 1B, os alunos conseguiram, com alguma autonomia, definir as restrições do problema, representar as funções graficamente, identificar a região admissível, determinar as coordenadas dos vértices do polígono obtido, definir a função lucro e calcular o seu valor em cada um dos vértices da região admissível (apenas trocaram uma das coordenadas), identificar a solução ótima e interpretar a solução no contexto do problema. Necessitaram de auxílio na passagem do concreto para o geral, no preenchimento das tabelas da etapa 1, para interpretar a questão da etapa 2, para introduzir as expressões algébricas das funções com denominadores na calculadora e para encontrar uma janela de visualização mais adequada.

O par AB resolveu a tarefa 2 de uma forma autónoma e sem grandes dificuldades. Os alunos necessitaram de ajuda para calcular o lucro obtido na venda de cada tipo de bola, na escrita de uma das condições do problema e na identificação da região admissível. Autonomamente, definiram as variáveis, representaram as funções graficamente, determinaram as coordenadas dos vértices da região admissível, definiram a função objetivo e calcularam o seu valor em cada um dos vértices do polígono, identificaram a solução ótima e interpretaram essa solução no contexto do problema.

Nas tarefas 1B e 2 os alunos aplicaram o que foi trabalhado em aulas anteriores, nas diversas etapas, conseguiram retirar a informação necessária do problema e explicar o raciocínio efetuado. Privilegiaram uma análise cuidada da informação recolhida e apresentaram algum rigor matemático. Optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica e utilizaram esta ferramenta para efetuar cálculos aritméticos, para representar funções graficamente e para determinar as coordenadas dos vértices da região admissível.

4.2. Par CD (formado pela aluna C e pelo aluno D)

4.2.1. Breve caracterização dos alunos do par CD

Os alunos do par CD apresentam algumas dificuldades ao nível da atenção e da concentração. Participam nas aulas apenas quando solicitados pela professora, são descontraídos embora bastante empenhados.

Consideram que estudar matemática permite melhorar as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas e que é uma disciplina fundamental para entender o mundo e nele viver.

4.2.2. Desempenho do par CD na tarefa 1A

Na resolução da tarefa 1A, os alunos do par CD leram atentamente o enunciado do problema e, após uma primeira análise, retiraram e organizaram as informações que consideraram importantes para a resolução do mesmo:

> *Aluna C:* O lucro para cada Kg de cavacas é de 5€ e para cada Kg de biscoitos é 7€. Sabe-se que cada Kg de cavacas leva 0,4 Kg de açúcar e 0,2 Kg de farinha e cada Kg de biscoitos leva 0,2 Kg de açúcar e 0,3 Kg de farinha. "Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível?"

Os alunos perceberam que o que se pretendia era procurar as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a confecionar, de modo a obter o maior lucro possível, e consideraram que a D. Maria deveria confecionar mais biscoitos de orelha do que cavacas, visto que o lucro destes era maior:

> *Aluna C:* Vai dar para fazer mais biscoitos do que cavacas… os biscoitos dão mais lucro… Se ela fizer, por exemplo, 6 kg de biscoitos… É melhor chamar a professora…

No entanto, embora tenham considerado que os dados estavam organizados e que podiam começar a experimentar valores para as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a confecionar (sem, no entanto, saberem se deviam considerar primeiro o açúcar e depois a farinha ou se deviam considerar estes dois ingredientes em conjunto), não tiveram em consideração que apenas tinham disponíveis 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha:

> *Aluna C:* Já organizamos os dados e agora temos de ir experimentando. Mas como? Primeiro considerando o açúcar e depois a farinha?
> *Professora:* O que se pretende é que ela obtenha o maior lucro possível, tendo em consideração que só tem 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha.
> *Aluna C:* Ah… só com estas quantidades.

Os alunos procuraram encontrar a produção mais rentável para a D. Maria, tendo em consideração as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha e, inicialmente, decidiram utilizar as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis apenas na confeção de biscoitos de orelha. Considerando apenas os 10 kg de açúcar, concluíram que conseguiam confecionar 50 kg de biscoitos de orelha, não tendo em conta a quantidade de farinha necessária à sua confeção, e que com os 6 kg de farinha, conseguiam confecionar 20 kg, não considerando a quantidade de açúcar necessária:

> *Aluna C:* Com 10 kg de açúcar… vamos dividir por 0,2 que vamos fazer primeiro para os biscoitos.
> *Aluno D:* Dá 50.
> *Aluna C:* Farinha são 6 kg. 6 a dividir por 0,3 dá 20.
> *Aluno D:* Mas assim gastamos tudo nos biscoitos…

No entanto, não conseguiram concluir quantos biscoitos de orelha conseguiam confecionar tendo em conta a quantidade disponível dos dois ingredientes.

De seguida, para que conseguissem confecionar também cavacas e não só biscoitos de orelha, optaram por dividir as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis para confecionar doçaria em igual quantidade (esquecendo-se que são necessárias diferentes quantidades de açúcar e de farinha para cada tipo). Assim, com 5 kg de açúcar concluíram que conseguiam confecionar 7,5 kg de cavacas (enganaram-se nos cálculos, visto que deveria ser 12,5 kg) e com 3 kg de farinha, 15 kg:

> *Aluna C:* Tens razão. Vamos fazer metade das quantidades para ficar igual. 5 kg de açúcar a dividir por 0,4 dá 7,5 kg. 3 kg de farinha a dividir por 0,2 dá 15 kg. E agora como é que a gente vai? Vou chamar a professora aqui.

De seguida, utilizaram 1 kg do açúcar disponível na confeção das cavacas e 9 kg para a confeção dos biscoitos de orelha, mas não se aperceberam que na produção de cavacas com 1 kg de açúcar é também necessário contabilizar a farinha utilizada, assim como na produção de biscoitos de orelha com 9 kg de açúcar.

A professora, desejando que os alunos resolvessem a tarefa, vendo que o tempo para a sua resolução era já muito limitado e verificando que existiam alguns percalços no raciocínio dos alunos e alguma demora na chegada a conclusões, acabou por optar por influenciar o rumo da resposta, sugerindo aos alunos que pensassem nas quantidades de doçaria a produzir e, posteriormente, nas quantidades de açúcar e de farinha que iriam gastar com essa produção:

> *Aluna C:* Essa conta temos de fazer de vezes, não é?
> *Professora:* O que é que vocês querem fazer?
> *Aluna C:* Dos 10 kg de açúcar, 1 kg para as cavacas e 9 para os biscoitos…
> *Professora:* Pensem nas quantidades que vão produzir e no que vão gastar…
> *Aluna C:* Mas como é que vemos as quantidades de açúcar?
> *Professora:* Então, se para produzir 1 kg de cavacas necessita de 400 g de açúcar, se produzir 10 kg…
> *Aluna C:* Ah…

Os alunos aceitaram a sugestão da professora e determinaram as quantidades de açúcar e de farinha necessárias para a confeção de 10 kg de cavacas e de 14 kg de biscoitos de orelha. Concluíram que para produzir 10 kg de cavacas era necessário 4 kg de açúcar e 2 kg de farinha, para produzir 14 kg de biscoitos de orelha era necessário 2,8 kg de açúcar e 4,2 kg de farinha e que, assim, a quantidade de farinha total necessária ultrapassava a quantidade disponível:

> *Aluna C:* Para então 10 kg de cavacas… 10 vezes 0,4 dá 4 kg e 10 vezes 0,2 dá 2 kg.
> *Aluno D:* Então gasta 4 kg de açúcar e 2 kg de farinha.

Aluna C: E para 14 Kg de biscoitos, 14 vezes 0,2 dá 2,8 kg de açúcar e 14 vezes 0,3 dá 4,2 kg de farinha. E farinha já temos $2+4{,}2$ que dá 6,2. Já não dá!

Optaram por diminuir a produção de cavacas para 5 kg mas, após determinarem as quantidades de farinha e de açúcar necessárias a essa produção e considerarem que estes valores eram baixos, mantiveram os 10 kg de cavacas e alteraram a quantidade de biscoitos de orelha para 12 kg:

Aluna C: Vamos fazer para 5 kg de cavacas. 5 vezes 0,2 dá 1 kg de açúcar. 5 vezes 0,3 dá 1,5 kg de farinha. É muito baixo… Vamos alterar os biscoitos. [mantendo os 10 kg de cavacas] 12 vezes 0,2 dá 2,4 kg de açúcar. 12 vezes 0,3 dá 3,6 kg de farinha.

Os alunos, após calcularem as quantidades de farinha e de açúcar necessárias à confeção de 10 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos de orelha, ficaram confusos e não interpretaram os resultados obtidos. A professora, questionando e ajudando na interpretação da resposta, tentou que os alunos organizassem o raciocínio, concluindo que para a confeção de 10 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos de orelha, eram necessários 6,4 kg de açúcar e 5,6 kg de farinha:

Aluna C: Professora… eu não estou boa.
Professora: Se produzir 10 kg de cavacas, quanto precisa de açúcar? E de farinha?
Aluna C: 4 kg de açúcar e 2 kg de farinha.
Professora: E se fizerem 12 kg de biscoitos?
Aluna C: 2,4 kg de açúcar 3,6 kg de farinha.
Professora: O que é que isso quer dizer? Que para confecionar 10 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos precisa-se de 6,4 kg de açúcar e 5,6 kg de farinha.
Aluna C: Mas convém não restar…
Professora: Exato! Têm de procurar o máximo da produção possível.

De seguida, os alunos decidiram aumentar a confeção da quantidade de biscoitos de orelha (visto que estes originavam um lucro maior) e diminuir a quantidade de cavacas (para que a confeção total não ultrapassasse a quantidade disponível de açúcar e de farinha) e calcularam as quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 6 kg de cavacas e 16 kg de biscoitos de orelha. Verificaram que para a confeção de 6 kg de cavacas era necessário 2,4 kg de açúcar e 1,2 kg de farinha e para a confeção de 16 kg de biscoitos de orelha era necessário 3,2 kg de açúcar e 4,8 kg de farinha (utilizando, assim, toda a farinha disponível e restando 4,4 kg de açúcar). Concluíram que esta era a solução ótima, embora não tenham comparado com a outra solução encontrada (10 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos de orelha), talvez devido ao facto de utilizarem toda a farinha disponível. Calcularam o lucro obtido na venda das cavacas e na venda dos biscoitos de orelha, mas não calcularam o lucro total:

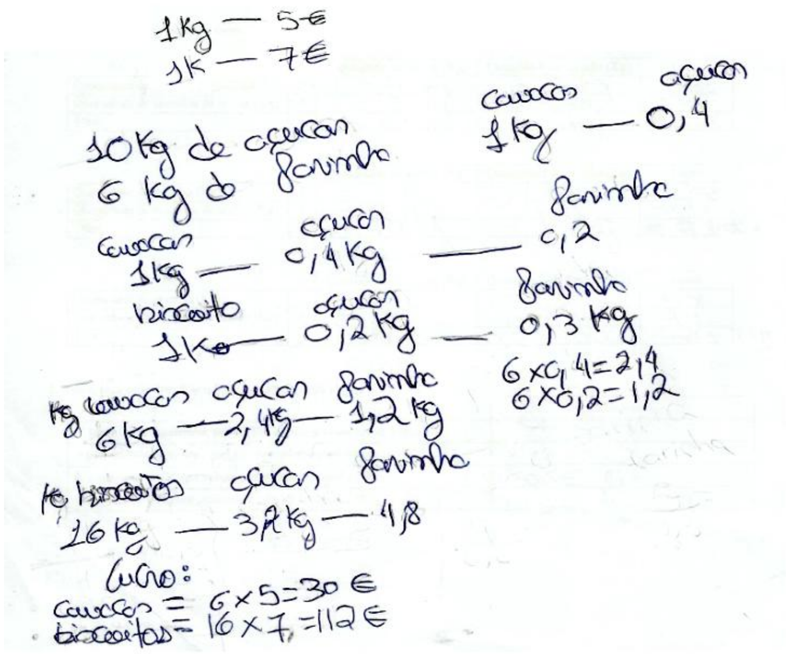


Figura 4.12: Resolução da tarefa 1A pelo par CD

Os alunos demonstraram dificuldade, ao longo de toda a tarefa, em relacionar os resultados obtidos: inicialmente, não consideraram que na confeção dos 50 kg de biscoitos de orelha, para além dos 10 kg de açúcar, é necessário também farinha; não tiveram em conta que cada tipo de doçaria envolve diferentes quantidades de açúcar e de farinha; não compararam o lucro das soluções encontradas, de forma a escolher a solução ótima.

4.2.3. Desempenho do par CD na tarefa 1B

Na resolução da tarefa 1B, os alunos leram e interpretaram o problema, já conhecido da tarefa 1A, e organizaram a informação necessária à resolução da tarefa proposta. Com a informação retirada do enunciado, procederam ao preenchimento da primeira tabela e no preenchimento da segunda, para determinar as quantidades de açúcar e de farinha, o par multiplicou as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha pelas quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 1 kg de cada tipo de doçaria. Assim, por exemplo, para calcular a quantidade de açúcar necessário à confeção de 2 kg de cavacas, multiplicaram 0,4 (quantidade de açúcar necessária para a confeção de 1 kg de cavacas) por 2:

Aluna C: 5€, 7€ nos biscoitos. 7, …, 12 de lucro total.
Aluno D: Aqui é 0,4; 0,2; 0,2; 0,3.
Aluna C: Isso… Estás atinado!
Aluno D: Aqui é 0,6 e aqui 0,5 [referindo-se ao total da primeira tabela].
Aluna C: Agora é 0,8; 0,4 e 10.
Aluno D: 0,6; 0,9 e 27.
Aluna C: 3 vezes 7 é 21.
Aluno D: 0,21.
Aluna C: Não é 0,21 é 21!
Aluno D: E aqui é 0,14; 0,13 e 31 [referindo-se ao total da segunda tabela].

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	1	0,4 kg	0,2 kg	5 €
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	1	0,2 kg	0,3 kg	7 €
Total		0,6 kg	0,5 kg	12 €

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	2	0,8 kg	0,4 kg	10 €
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	3	0,6 kg	0,9 kg	21 €
Total		0,14 kg	0,13 kg	31 €

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	x	$0,4x$	$0,2x$	$5x$
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	y	$0,2y$	$0,3y$	$7y$
Total		$0,4x + 0,2y$	$0,2x + 0,3y$	$5x + 7y$

Figura 4.13: Resolução da etapa 1, da tarefa 1B, pelo par CD

No preenchimento da terceira tabela, os alunos solicitaram a ajuda da professora para determinar a quantidade de açúcar necessária à confeção de x kg de cavacas e de y kg de biscoitos de orelha. Estes, inicialmente determinaram que $0{,}6x$ era a quantidade total de açúcar mas após a professora relembrar que não se podem simplificar termos que não são semelhantes, escreveram a expressão $0{,}4x + 0{,}2y$ e completaram o resto da tabela:

Aluno D: Agora aqui é $0{,}8x$.
Aluna C: Não, é $0{,}8$.
Aluno D: É $0{,}4$.
Aluna C: $0{,}4x$! E $0{,}2x$; $5x$; $0{,}2y$; $0{,}3y$ e $7y$.
Aluno D: E agora $0{,}6x$? Não sei…
Aluna C: Professora, podia chegar aqui?
Professora: Cuidado porque não se podem simplificar termos que não são semelhantes.
Aluna C: Então fica a expressão $0{,}4x + 0{,}2y$.

Após a etapa 1 estar concluída, seguiram para a etapa 2. Nesta etapa, os alunos escreveram as condições, preenchendo a tabela relativa à etapa 2:

Aluna C: Aqui é $x \geq 0$ e em baixo é igual mas é y. Agora aqui é ≤ 6 mas… $y \leq 6$? A quantidade de farinha é 6... então é ≤ 6 [apesar de verbalmente não estar correto, escreveram a condição corretamente].

	Condição
x (quantidade de cavacas, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$x \geq 0$
y (quantidade de biscoitos de orelha, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$y \geq 0$
A quantidade de farinha utilizada é inferior ou igual a 6 kg.	$0,2x + 0,3y \leq 6$
A quantidade de açúcar utilizada é inferior ou igual a 10 kg.	$0,4x + 0,2y \leq 10$

Figura 4.14: Resolução da etapa 2, da tarefa 1B, pelo par CD

Na resolução da etapa 3, recordaram os conceitos e os procedimentos aprendidos em aulas anteriores e começaram por resolver as inequações em ordem a y:

Aluna C: Onde é que está o que fizeste na última aula? Temos de desenhar!! Agora aqui ainda temos de deixar o y sozinho. [referindo-se à resolução das inequações].

Os alunos optaram pela resolução gráfica da etapa. Introduziram as expressões algébricas das funções na calculadora gráfica e ajustaram os valores mínimos de x e de y para -20, não tendo em conta que tanto o x como o y tomam apenas valores positivos ou nulos. Com apenas este ajuste não conseguiram visualizar todas as funções e decidiram alterar novamente os valores da janela, desta vez aumentando os valores máximos de x e de y para 50 (valor alto mas possível para visualizar a região admissível).

Após tentarem determinar o ponto de interseção das funções $y = 6 - 0{,}2x$ e $y = 10 - 0{,}4x$, suspeitaram que algo havia de errado visto que os valores de x e de y determinados eram demasiados pequenos para que $(20, 2)$ fosse a solução ótima:

> *Aluna C:* Já está… e agora?
> *Aluno D:* $6 - 0{,}2x$.
> *Aluna C:* Mas e o y?
> *Aluno D:* Tens de pôr todas! O y está aqui. Põe na janela -20 [não tiveram sensibilidade para colocar só valores positivos ou nulos]
> *Aluna C:* Assim professora?
> *Professora:* Sim, continuem!
> *Aluno D:* Qual é a área para pintar?
> *Aluna C:* Ainda não temos as 4 condições…
> *Aluno D:* Olha essa aqui! Aumenta isso!! [referindo-se a aumentar a janela de visualização]
> *Aluna C:* Interseção… *calc*… Humm… alguma coisa está mal aqui… Professora…

Na introdução das expressões algébricas das funções na calculadora, os alunos não colocaram os seus denominadores, erro que detetaram após a professora os ter questionado sobre a utilização de parênteses:

> *Professora:* Espetáculo! Qual é essa janela? Mas espera… colocaste parênteses?
> *Aluna C:* Ah… falta dividir.

Após a representação gráfica das funções, os alunos identificaram a região admissível e determinaram, através dos comandos *value*, *intersect* e *zero* da calculadora gráfica *Texas*, as coordenadas dos vértices $(0, 20)$, $(22{,}5; 5)$ e $(25, 0)$ do polígono obtido. Através do comando *value*, determinaram o vértice de coordenadas $(0, 20)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = \frac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$ com o eixo Oy, com o comando *intersect*, determinaram o vértice de coordenadas $(22{,}5; 5)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y = \frac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$ e $y = \frac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$ e através do comando *zero*, determinaram o vértice de coordenadas $(25, 0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = \frac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$ com o eixo Ox.

Solicitaram que a professora verificasse a utilização do comando *zero* na determinação dos zeros da função de expressão analítica $y = \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$ (os alunos esqueceram-se que para selecionar a função pretendida deviam clicar nas setas, para cima ou para baixo, do cursor da calculadora) e do comando *value* na determinação da imagem do ponto de abcissa zero na função de expressão analítica $y = \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$, devido à insegurança sentida no uso desta ferramenta:

Aluna C: Aqui os zeros… nós escolhemos uma função, uma qualquer?
Professora: Qual é o ponto que queres?
Aluna C: Este [apontando].
Professora: Então é dessa função, não de uma função qualquer.
Aluna C: Mas como a gente o encontra?
Professora: Anda com a setinha para cima.
Aluna C: Pois!
Aluna C: Professora, no *value* a gente mete x igual a 0?
Professora: Sim.
Os alunos, de seguida, organizaram a informação recolhida na folha de resposta:

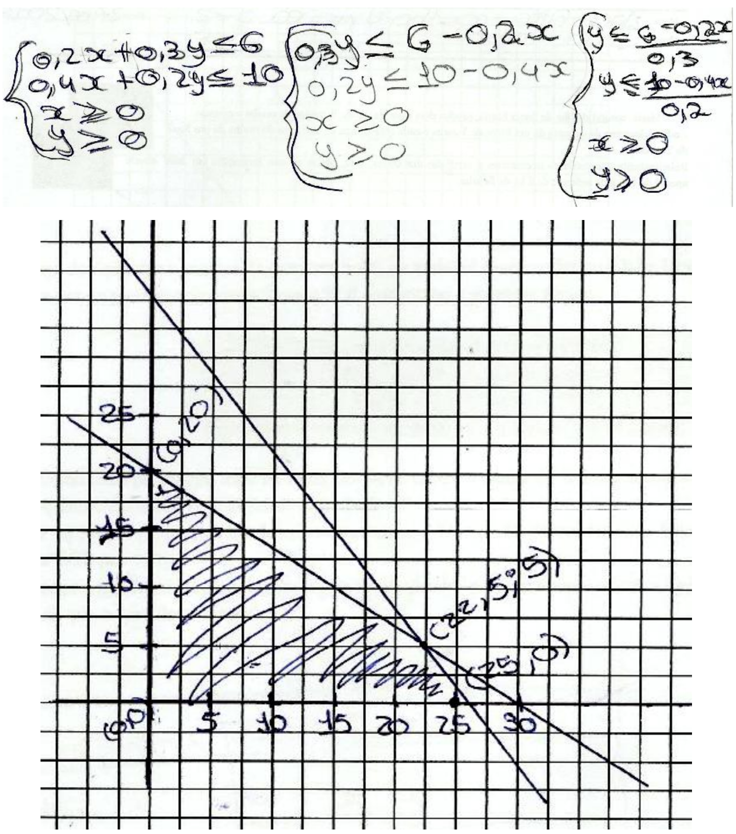


Figura 4.15: Resolução da etapa 3, da tarefa 1B, pelo par CD

Na resolução das etapas 4 e 5, definiram a função lucro e calcularam o seu valor em cada um dos vértices do polígono obtido:

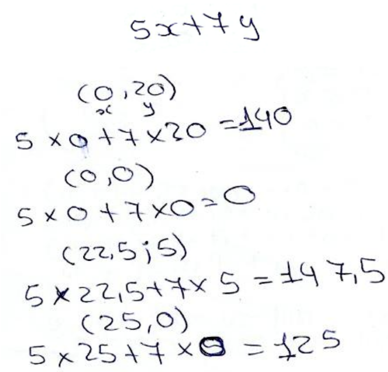


Figura 4.16: Resolução das etapas 4 e 5, da tarefa 1B, pelo par CD

Por fim, identificaram a solução ótima mas não a interpretaram, isto é, não referiram que a D. Maria para obter um maior lucro tinha de confecionar 22,5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos de orelha:

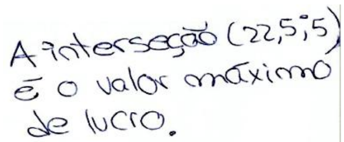


Figura 4.17: Resolução da etapa 6, da tarefa 1B, pelo par CD

Embora estes alunos tenham algum conhecimento relativamente à aplicação do que foi trabalhado em aulas anteriores, é visível alguma falta de rigor matemático (simplificaram termos que não são semelhantes, não colocaram os denominadores nas expressões algébricas das funções quando as introduziram na calculadora gráfica), talvez relacionado com alguma insegurança e com algumas lacunas existentes ao nível do conhecimento matemático.

4.2.4. Desempenho do par CD na tarefa 2

Na resolução da tarefa 2, os alunos tentaram seguir alguns procedimentos adotados na resolução da tarefa 1B (definir as variáveis e a função objetivo; identificar as restrições do problema; construir o modelo matemático; obter a solução ótima) e, assim, começaram por definir as variáveis, embora com pouco rigor (na resposta, onde se lê “marca oficial” e “marca SOL” deveria ler-se, por exemplo, “bolas de marca oficial” e “bolas da marca SOL”), e organizaram as informações que retiraram do enunciado do problema.

De seguida, procuraram calcular o valor do lucro da venda de cada tipo de bola:

Aluno D: Aqui é x e o outro é y. $2x$?
Aluna C: O dobro é 2. O x é o número de bolas de marca oficial.
Aluno D: Professora podia vir aqui?
Aluna C: Aqui o lucro…
Professora: Se ele compra a 12 € e vende a 14 €, qual é o lucro?
Aluna C: Dois.
Professora: Ok. E a outra é a mesma coisa. Se ele compra a 8 e se pretende vender a 11…
Aluna C: Três.

Determinaram as expressões do número de bolas, $x + y$, e do lucro, $2x + 3y$, e organizaram os dados numa tabela:

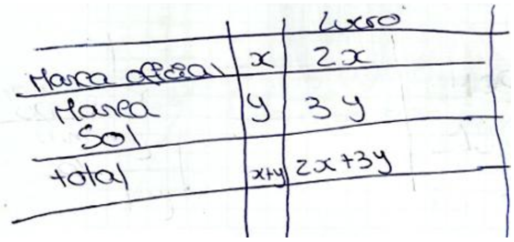


Figura 4.18: Definição das variáveis e organização dos dados da tarefa 2, pelo par CD

Após a organização dos dados, começaram a escrever as restrições do problema. Os alunos solicitaram a intervenção da professora na escrita das restrições em linguagem matemática, uma vez que apresentaram algumas dificuldades na leitura e na compreensão do enunciado:

Aluna C: Aqui professora [apontando].
Professora: Para beneficiar da promoção, ele tem sempre de comprar mais de 10 bolas da marca oficial. Se o número de bolas da marca oficial é x, como é que vão escrever?
Aluno D: $x > 10$.
Professora: Muito bem… essa já está. Agora quais são as outras condições?
Aluno D: $y \geq 0$.
Professora: Muito bem.
Aluna C: O número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial, logo, $y \leq 2x$.
Professora: Perfeito.

No diálogo com a professora, o aluno D referiu a condição $x > 10$, no entanto, os alunos apresentaram na resposta $x \geq 10$ e resolveram a inequação $x + y \leq 45$ em ordem a y:

Aluna C: Fica $y \leq 45 - x$.

Os alunos, de seguida, escreveram as restrições do problema:

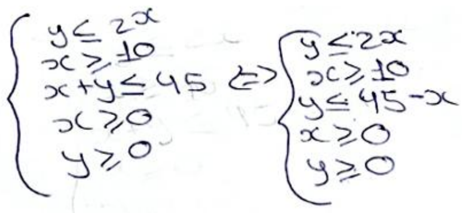


Figura 4.19: Identificação das restrições do problema da tarefa 2, pelo par CD

Optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica. Começaram por introduzir as expressões analíticas das funções na calculadora e, posteriormente, identificaram a região admissível.

Surgiram algumas dúvidas na representação gráfica de retas verticais e houve necessidade de confirmar se estavam a proceder corretamente:

Aluno D: Mas agora como se põe esta na calculadora? [referindo-se ao $x \geq 10$] Onde se coloca o 10?
Aluna C: Agora vai-se ver na calculadora…
Aluno D: Professora…
Professora: Como se representam retas verticais?

Aluna C: A gente sabe que é assim mas a dúvida é colocar os valores.
Professora: Se aqui é o 15, onde é que há de ficar o 10?
Aluno D: Eu bem te disse.
Professora: Então se já sabiam, qual é a dúvida?
Aluna C: Era para ter a certeza.

De seguida, embora seja sentida alguma insegurança ("Isto não está nada bem…", "Mas isto não pode ser", "Faz outra vez"), os alunos, através da discussão e interajuda, conseguiram determinar as coordenadas dos vértices do polígono obtido, identificando e utilizando os comandos *intersect*, *value* e *zero* da calculadora gráfica *Texas*. Com o comando *intersect*, determinaram o vértice de coordenadas $(15, 30)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y = 2x$ e $y = 45 - x$, com o comando *value*, determinaram o vértice de coordenadas $(10, 20)$, ponto de interseção da reta de equação $x = 10$ com a função definida de expressão analítica $y = 2x$ e com o comando *zero*, determinaram o vértice de coordenadas $(45, 0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = 45 - x$ com o eixo Ox.

Aluna C: Eu disse que tinhas de calcular primeiro.
Aluno D: Calcular o quê?
Aluna C: Tens de descobrir! *Second Calc*… [referindo-se à determinação das coordenadas] Depois vai-te dar as coordenadas. Aqui fazemos a interseção. x é 15. Aqui é o 15, o 10 é para aqui.
Aluno D: Ah?
Aluna C: Isto não está nada bem…
Aluna C: E agora como é que a gente calcula?
Aluno D: O x é 10, temos de saber o y.
Aluna C: É *value*?
Aluno D: Sim!
Aluna C: Mas isto não pode ser… se aqui é 10, não pode ser 6 aqui…
Aluno D: Faz outra vez.
Aluna C: *Value*… x é 10, y é 20.
Aluno D: É isso!
Aluna C: Então aqui é (10, 0); (10, 20); (15, 30) e (45, 0).

Após determinarem as coordenadas dos vértices do polígono obtido, representaram as funções num referencial cartesiano:

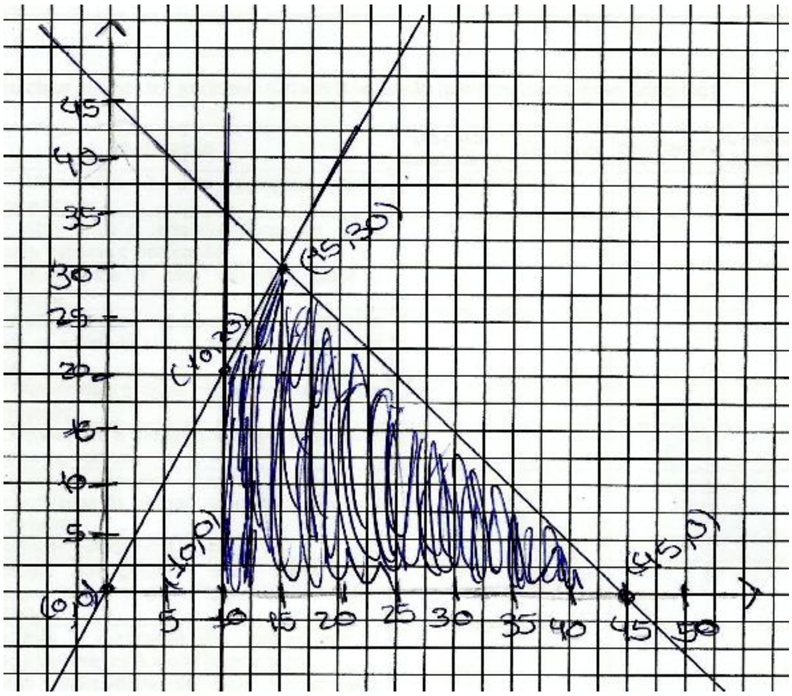


Figura 4.20: Representação da região admissível do problema da tarefa 2, pelo par CD

De seguida, definiram a função objetivo, calcularam o seu valor em cada um dos vértices do polígono (embora com pouco rigor visto que, onde está escrito, por exemplo, $(10,0)$ deveria estar $L(10,0)$) e identificaram a solução ótima:

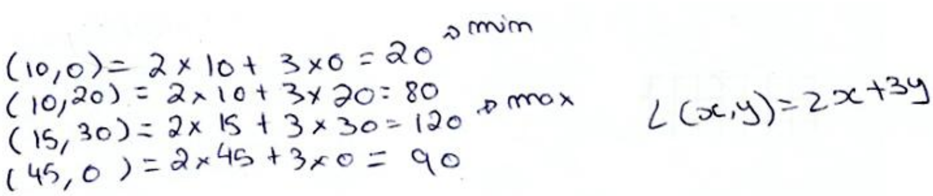


Figura 4.21: Definição da função lucro e cálculo do valor desta função em cada um dos vértices do polígono do problema da tarefa 2, pelo par CD

Após identificarem a solução ótima, os alunos deram resposta ao problema, referindo que o José deve comprar 15 bolas de marca oficial e 30 bolas da marca SOL, para obter o lucro máximo:

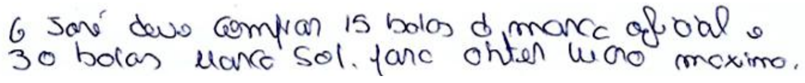


Figura 4.22: Interpretação dos resultados obtidos no problema da tarefa 2, pelo par CD

Verifica-se que os alunos recorrem constantemente ao auxílio da professora essencialmente para confirmar raciocínios (cálculo do lucro de cada tipo de bola; escrita de condições; representação gráfica de retas verticais) e também são visíveis algumas lacunas ao nível de conhecimentos matemáticos (falta de rigor matemático visto que na tabela inicial de organização de dados, onde se lê “marca oficial” e “marca SOL” deveria ler-se, por exemplo, “bolas de marca oficial” e “bolas da marca SOL” e no cálculo do valor da função lucro em cada um dos vértices onde está escrito, por exemplo, $(10,0)$ deveria estar $L(10,0)$; dificuldades na representação gráfica de retas verticais).

4.2.5. Síntese do desempenho do par CD

Na resolução da tarefa 1A, o par CD leu atentamente o enunciado e retirou e organizou os dados do problema. Estes alunos apresentaram dificuldades relativamente à compreensão da relevância da informação relativa às quantidades de farinha e de açúcar disponíveis. Após esclarecerem que a D. Maria apenas podia utilizar 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha na confeção da doçaria, os alunos exploraram a tarefa fazendo tentativas de várias possibilidades para as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha, tendo em conta as quantidades de ingredientes disponíveis.

Estes alunos tiveram sempre o cuidado de procurar soluções em que a quantidade de biscoitos de orelha fosse superior à quantidade de cavacas, visto o lucro destes ser maior. Inicialmente, procuraram determinar a quantidade de biscoitos de orelha a confecionar com as quantidades totais de farinha e de açúcar, posteriormente, com metade das quantidades de farinha e de açúcar disponíveis e, de seguida, com 9 kg de açúcar. Por sugestão da professora, procuraram encontrar as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar, tendo em consideração as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis e o lucro a obter.

Mais pormenorizadamente, inicialmente, decidiram verificar qual a quantidade de biscoitos de orelha que a D. Maria podia confecionar com os 10 kg de açúcar e com os 6 kg de farinha (concluindo que podiam confecionar 50 kg de biscoitos de orelha e 20 kg, respetivamente) e, posteriormente, com 5 kg de açúcar e 3 kg de farinha. Os alunos afirmaram que, com 5 kg de açúcar e 3 kg de farinha, a D. Maria conseguia confecionar doçaria em igual quantidade, não considerando que cada tipo de doçaria envolve diferentes quantidades de açúcar e de farinha. De seguida, determinaram que quantidade de cavacas esta conseguia confecionar utilizando apenas 1 kg do açúcar e que quantidade de biscoitos de orelha conseguia confecionar utilizando 9 kg de açúcar mas não analisaram toda a situação, isto é, não tiveram em conta que na produção de cavacas com 1 kg de açúcar é também necessário contabilizar a farinha utilizada, assim como na produção de biscoitos de orelha com 9 kg de açúcar. Após aceitarem a sugestão da professora, que indicou que deveriam pensar nas quantidades de doçaria produzidas e, posteriormente, nas quantidades de açúcar e de farinha que iriam gastar com essa produção, os alunos determinaram as quantidades de açúcar e de farinha necessárias para a confeção de 10 kg de cavacas e de 14 kg de biscoitos de orelha. Como verificaram que a quantidade necessária de farinha a esta produção era superior à quantidade disponível, optaram por diminuir a quantidade de cavacas a confecionar, e determinaram as quantidades de açúcar e de farinha necessárias para a confeção de 5 kg de cavacas e de 14 kg de biscoitos de orelha. Como verificaram que as quantidades de farinha e de açúcar necessárias eram inferiores às quantidades disponíveis, mantiveram os 10 kg de cavacas e alteraram a quantidade de biscoitos de orelha para 12 kg. Com esta produção, ainda não utilizavam a totalidade das quantidades de açúcar e de farinha disponíveis e decidiram aumentar a confeção da quantidade de biscoitos de orelha (visto que estes apresentavam um lucro maior) e diminuir a quantidade de cavacas (para que a confeção total não ultrapassasse a quantidade disponível de açúcar e de farinha) e calcularam as quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 6 kg de cavacas e 16 kg de biscoitos de orelha. Com esta produção, verificaram que utilizavam toda a farinha disponível e que restava 4,4 kg de açúcar. Concluíram que esta era a solução ótima, embora não tenham comparado com a outra solução encontrada (10 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos de orelha), talvez devido ao facto de utilizarem toda a farinha disponível. Por fim, calcularam o lucro obtido na venda das cavacas e na venda dos biscoitos de orelha, isoladamente.

Na tarefa 1A, a calculadora foi utilizada para efetuar todos os cálculos aritméticos.

Na resolução da tarefa 1B, os alunos preencheram as duas primeiras tabelas da etapa 1, escreveram as condições, definiram as restrições do problema, identificaram a região admissível, definiram a função lucro e calcularam o seu valor em cada um dos vértices da região admissível e identificaram a solução ótima. Necessitaram de auxílio na passagem do concreto para o geral (preenchimento da terceira tabela da etapa 1), na escrita das expressões algébricas na calculadora gráfica e na confirmação de alguns comandos da calculadora gráfica para determinar as coordenadas dos vértices do polígono obtido e não interpretaram os resultados obtidos.

O par CD resolveu a tarefa 2 com alguma autonomia e sem grandes dificuldades. Necessitou que a professora verificasse o cálculo do valor do lucro de cada tipo de bola e a escrita das restrições do problema. Autonomamente, definiram as variáveis, organizaram a informação numa tabela, representaram as funções graficamente, identificaram a região admissível, determinaram as coordenadas dos vértices da região admissível, definiram a função objetivo e calcularam o valor da função objetivo em cada um dos vértices do polígono, identificaram a solução ótima e interpretaram os resultados obtidos.

Apresentaram alguma insegurança ("Isto não está nada bem…", "Mas isto não pode ser", "Faz outra vez"), algumas dificuldades de leitura e compreensão, visto que nem sempre conseguiram compreender a informação necessária e explicar o raciocínio efetuado, e algumas lacunas ao nível de conhecimentos matemáticos (falta de rigor matemático visto que na tabela inicial de organização de dados, onde se lê "marca oficial" e "marca SOL" deveria ler-se, por exemplo, "bolas de marca oficial" e "bolas da marca SOL" e no cálculo do valor da função lucro em cada um dos vértices onde está escrito, por exemplo, $(10, 0)$ deveria estar $L(10, 0)$; dificuldades na representação gráfica de retas verticais).

Nas tarefas 1B e 2 os alunos aplicaram o que foi trabalhado em aulas anteriores e, após a escrita do problema em linguagem matemática, apresentaram alguma capacidade de resolução e de aplicação de ferramentas matemáticas. Optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica e utilizaram esta ferramenta para efetuar cálculos aritméticos, para representar funções graficamente e para determinar as coordenadas dos vértices da região admissível.

4.3. Par EF (formado pela aluna E e pelo aluno F)

4.3.1. Breve caracterização dos alunos do par EF

Os alunos do par EF são distraídos e apresentam dificuldades na aquisição e na aplicação dos conhecimentos, fraco domínio do vocabulário e das noções essenciais, falta de métodos e hábitos de estudo e pouca autonomia na realização das tarefas propostas.

Consideram que estudar matemática exige trabalho e dedicação, mas que, no entanto, permite melhorar as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas e que é uma disciplina fundamental para entender o mundo e nele viver.

4.3.2. Desempenho do par EF na tarefa 1A

Os alunos optaram por fazer uma leitura completa do enunciado, para uma melhor análise da tarefa 1A, mas ficaram bastante confusos e não conseguiram, de imediato, estruturar um raciocínio conciso e coerente com o que leram. O primeiro obstáculo na resolução da tarefa proposta foi, assim, na interpretação e compreensão do enunciado:

Aluno F: Percebeste alguma coisa?
Aluna E: Calma, estou lendo…
Aluno F: Esse kg está matando uma pessoa… quanto é que é?
Aluna E: Cada kg de cavacas dá um lucro de 5€.
Aluno F: E os biscoitos 7€.
Aluna E: Dispõe apenas de 10 kg de açúcar de 6 kg de farinha.
Aluno F: A professora podia vir aqui?
Aluna E: A professora que explique o problema que não estamos a perceber isto…
Professora: Já leram? O que me sabem dizer sobre o que leram?
Aluno F: É esse kg… está-me confundindo…

A professora leu e explicou o que se pretendia com o problema e incentivou os alunos a procurar uma solução para o mesmo. Foi necessário perceber as dificuldades dos alunos e exemplificar, questionando quais as quantidades de farinha e de açúcar necessárias para uma confeção de 3 kg de cavacas e de 4 kg de biscoitos de orelha, com o intuito de ajudar e esclarecer:

Aluno F: Temos de fazer uma comparação entre os dois ou fazemos primeiro para as cavacas e depois para os biscoitos? Podemos fazer para os dois?
Professora: Podem fazer separadamente mas têm de considerar que, no máximo, podem usar 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha.
Aluno F: Então fazemos uma regra de três simples…
Professora: Será que a D. Maria com 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha consegue produzir 3 kg de cavacas e 4 kg de biscoitos, por exemplo?
Aluno F: Não estou a perceber como calcular a quantidade de açúcar…
Professora: Se 1 kg de cavacas leva 0,4 kg de açúcar, 3 kg…
Aluno F: Ah! Ok…

Professora: Tentem o 3 ou outros valores… Queremos saber qual o maior lucro que a D. Maria consegue obter. Deu para perceber a ideia? Tentem!
Aluna E: O maior lucro sem ultrapassar os 10 kg de açúcar e 6 kg de farinha…
Professora: Isso mesmo!

Ficou claro que os alunos revelaram bastantes dificuldades na interpretação dos dados do problema e que só conseguiram ultrapassar essas dificuldades com a ajuda da professora. Como ficaram dependentes da explicação do enunciado, invalidaram, desta forma, a resolução da tarefa de forma autónoma. No entanto, após compreenderem o que se pretendia, procuraram encontrar, com empenho e entusiasmo, a produção mais rentável para a D. Maria, tendo em consideração as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha.

A estratégia utilizada foi a de tentativa e erro e utilizaram a calculadora para efetuar todos os cálculos.

Inicialmente, calcularam a quantidade de farinha necessária para a confeção de 3 kg de cavacas e de 3 kg de biscoitos de orelha:

Aluna E: É tipo o maior lucro que ela consegue fazer sem ultrapassar estes valores.
Aluno F: Sim, mas podes fazer cavacas… não sei quantos kg de cavacas.
Aluna E: Vamos tentar com 3. Imagina que ela faz 3 kg de cavacas e 3 também de biscoitos. E agora para fazer a conta… Ela para 1 kg precisa de 0,2, para 3 kg precisa de 0,6 kg para a farinha. Agora para os biscoitos: 1 kg precisa de 0,3; para 3 kg precisa de 0,9. Então $0{,}6+0{,}9$ dá 1,5… 3 não dá, tem de ser um número mais elevado.
Aluno F: É melhor ver se estamos a fazer bem.
Aluna E: Oh homem temos de encontrar o valor maior… por tentativas.

Como verificaram que a quantidade de farinha utilizada com esta produção era bastante inferior à disponível, decidiram aumentar a quantidade de cavacas e de biscoitos de orelha para 7 kg e determinaram as quantidades de farinha e de açúcar necessárias:

Aluna E: Vamos tentar para 7 kg.
Aluno F: 5 kg.
Aluna E: Isso não dá, é muito baixo!
Aluno F: Então 7 kg. Para o açúcar: 7 vezes 0,4 dá 2,8. 7 vezes 0,2 dá 1,4.
Aluna E: 2,8 mais 1,4 dá 4,2. Ainda é pouco.
Aluno F: Para a farinha: 7 vezes 0,2 dá 1,4. 7 vezes 0,3 dá 2,1.
Aluna E: 1,4 mais 2,1 dá 3,5. O que também é pouco.
Aluno F: Mas de farinha é só 6…

Decidiram, de seguida, aumentar as quantidades de doçaria para 12 kg e verificaram que com esta quantidade utilizavam toda a farinha disponível:

Aluna E: Consegue mais quilos, vamos fazer para 12!
Aluno F: 12 vezes 0,4 dá 4,8. 12 vezes 0,2 dá 2,4.
Aluna E: E agora para a farinha:
12 vezes 0,2 dá 2,4. 12 vezes 0,3 dá 3,6.
Aluno F: A farinha está certa! Já deu 6!
Aluna E: Agora o açúcar.
Aluno F: 4,8 mais 2,4 dá 7,2. 12 vezes 5 dá 60€ de lucro das cavacas.12 vezes 7 dá 84€ de lucro dos biscoitos.
Aluna E: Dá um lucro total de 144€.

Os alunos decidiram procurar, de seguida, outra solução em que utilizassem também a totalidade de açúcar disponível:

Aluno F: Mas ela pode não fazer a mesma quantidade de biscoitos e de cavacas…

Aluna E: Pois é! Faz 0,4 vezes 10. Dá 4 kg.
Aluno F: Professora estou aqui com uma dúvida. A quantidade é total, certo?
Professora: Sim.
Aluno F: Em cavacas, ela pode gastar os 10 kg de açúcar ou tem de ser no total?
Professora: No total…
Aluno F: Então já chegamos à conclusão que se produzir 12 kg de cada, dá um total de 6 kg de farinha… falta agora o açúcar. Pode gastar menos de 10 kg?
Professora: Sim… não pode ultrapassar os 10… Vocês fizeram 12 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos mas não precisa de confecionar quantidades iguais. Essa é uma opção, ótimo, agora tentem outras, de maneira que gaste o total de açúcar também.
Aluno F: Queremos saber quanto lucrou com tudo, não é? Podemos fazer quantidades diferentes de coisas… O que rende aqui mais são os biscoitos, posso fazer mais quantidade de biscoitos. Posso fazer 2 kg de cavacas e vamos sempre tentando encaixar para dar o máximo de biscoitos…
Aluna E: Vamos tentar…

Determinaram a quantidade de farinha a utilizar na confeção de 10 kg de cavacas e de 10 kg de biscoitos de orelha:

Aluno F: Farinha: 10 vezes 0,2 dá 2 e 10 vezes 0,3 dá 3. Então 2 mais 3 dá 5 e pode gastar 6.
Aluna E: Humm… não dá, vamos tentar outro.
Aluno F: Vamos tentar 1 kg de cavacas e o resto de biscoitos ou então para 5 kg de cavacas…

Como a quantidade de farinha não totalizou os 6 kg, determinaram as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar na confeção de 5 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha:

Aluno F: Para 5 kg de cavacas: 5 vezes 0,4 dá 2 kg de açúcar e 5 vezes 0,2 dá 1 kg de farinha.
Aluna E: Para 20 kg de biscoitos: 20 vezes 0,2 dá 4 kg de açúcar e 20 vezes 0,3 dá 6 kg de farinha.
Aluno F: Não pode ser de farinha.

Como com estas quantidades ultrapassavam o total de farinha disponível, determinaram a quantidade de farinha a utilizar na confeção de 5 kg de cavacas e de 19 kg de biscoitos de orelha e de 5 kg de cavacas e de 17 kg de biscoitos de orelha e verificaram que, com estas quantidades de doçaria, também ultrapassavam a quantidade de farinha disponível:

Aluna E: Diminui para 19.
Aluno F: 19 vezes 0,3 dá 5,7. Também não dá.
Aluna E: 17?
Aluno F: 17 vezes 0,3 dá 5,1.
Aluna E: Não pode ultrapassar os 6 kg de farinha.

Continuaram à procura de uma produção em que utilizassem a totalidade das quantidades disponíveis e, desta vez, determinaram as quantidades de farinha e de açúcar necessárias à confeção de 4 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha, de 4 kg de cavacas e de 19 kg de biscoitos de orelha e de 4 kg de cavacas e de 17 kg de biscoitos de orelha.

Verificaram que apesar desta última ser uma solução válida, o lucro da confeção de 4 kg de cavacas e de 17 kg de biscoitos de orelha é menor do que o lucro da confeção de 12 kg de cavacas e de 12 kg de biscoitos de orelha:

Aluno F: Muda isso. Aqui para 4… 4 kg de cavacas.
4 vezes 0,4 dá 1,6 kg de açúcar e 4 vezes 0,2 dá 0,8 kg de farinha. Bem, 20 kg de biscoitos não dá… nem 19.
Aluna E: Dá 17. 17 vezes 0,2 dá 3,4 kg de açúcar e 17 vezes 0,3 dá 5,1 kg de farinha.
Aluno F: 4 vezes 5 dá 20€ e 17 vezes 7 dá 119€. Mas o lucro é menor!

Por último, determinaram as quantidades de açúcar e de farinha necessárias à confeção de 1 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha:

Aluna E: Faz 1 kg de cavacas e 20 kg de biscoitos.
Aluno F: Não dá! Só de farinha temos 6 kg para 20 kg de biscoitos.

Concluíram, de seguida, que com a confeção de 12 kg de cavacas e de 12 kg de biscoitos de orelha, obtinham um lucro de 144 € e eram necessários 7,2 kg de açúcar e 6 kg de farinha. Foi a melhor solução que encontraram:

Aluna E: Então a melhor solução é a outra… 12 kg de cavacas e 12 kg de biscoitos.
Aluno F: Sim, o lucro é de 144€.

Os alunos fizeram tentativas de várias possibilidades para as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar e estruturaram a informação necessária para responderem ao inicialmente pedido:

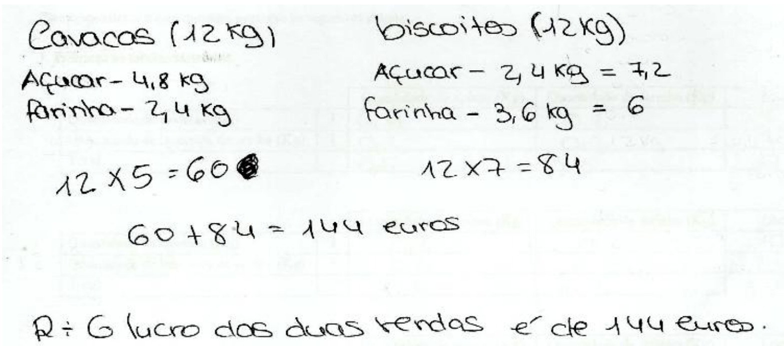


Figura 4.23: Resolução da tarefa 1A pelo par EF

4.3.3. Desempenho do par EF na tarefa 1B

Na resolução da tarefa 1B, os alunos leram e interpretaram o problema, já conhecido da tarefa 1A, e organizaram a informação necessária à resolução da tarefa proposta.

Na resolução da etapa 1, os alunos retiraram os dados do enunciado e preencheram as duas primeiras colunas da primeira tabela, solicitando, no entanto, que a professora verificasse se estavam no caminho certo:

Aluno F: A professora pode vir aqui, por favor? Isto é para fazer assim?
Professora: Sim, continuem.
Aluno F: E agora o lucro?
Aluna E: Eu acho que é igual ao outro.
Aluno F: Então 5; 7; 5 mais 7 é 12.

Este comportamento foi constante em toda a tarefa, o que demonstra alguma insegurança e desconforto relativamente aos seus conhecimentos matemáticos e pouca autonomia na resolução da tarefa proposta.

Após preencherem a primeira tabela, completaram a segunda multiplicando as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha pelas quantidades de farinha e de açúcar necessárias à confeção de 1 kg de cada tipo de doçaria, para determinar as quantidades de açúcar e de farinha. Neste sentido, 0,8 resulta do produto de 0,4 (quantidade de açúcar necessária à confeção de 1 kg de cavacas) por 2 (2 kg de cavacas).

No preenchimento da terceira tabela, na passagem do concreto para o geral, os alunos optaram por ler pausadamente o enunciado, tentando obter as expressões que completam a tabela.

Solicitaram que a professora esclarecesse como conseguiam obter a expressão matemática referente à quantidade de açúcar para x kg de cavacas confecionadas e esta, por sua vez, perguntou-lhes como obtiveram o 0,8, na segunda tabela, com o intuito de orientar o seu raciocínio. Os alunos conseguiram, deste modo, obter a expressão matemática e, posteriormente, completar as duas primeiras linhas da tabela:

Aluno F: Aqui professora… essa conta.
Professora: Como encontraste o 0,8?
Aluno F: Fiz dois vezes qualquer coisa.
Professora: Qualquer coisa? Dois vezes o quê? 0,4, não foi? Então se agora é x…
Aluno F: 0,4 vezes x.
Professora: Que dá?
Aluno F: $0{,}4x$.
Professora: Isso.

Para completar a terceira linha da tabela, os alunos entenderam que, como os termos não são semelhantes, as expressões $0{,}4x+0{,}2y$, $0{,}2x+0{,}3y$ e $5x+7y$ não se podem simplificar:

Aluno F: Eu não sei se isto está certo…
Aluna E: Acho que está. No x e o y não se mete nada e nos outros fica a expressão.

Os alunos estruturaram a informação necessária e preencheram as tabelas, dando resposta à etapa 1:

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	1	0,4	0,2	5
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	1	0,2	0,3	7
Total		0,6	0,5	12

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	2	0,8	0,4	10
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	3	0,6	0,9	21
Total		1,4	1,3	31

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	x	0,4x	0,2x	5x
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	y	0,2y	0,3y	7y
Total		0,4x+0,2y	0,2x+0,3y	5x+7y

Figura 4.24: Resolução da etapa 1, da tarefa 1B, pelo par EF

Após a etapa 1 estar concluída, seguiram para a etapa 2. Nesta, os alunos solicitaram que a professora verificasse se as duas últimas condições estavam corretas:

Aluno F: Professora é assim?

Professora: Inferior ou igual a 6.
Aluno F: Assim, não é? [escreveu a condição $0{,}2x + 0{,}3y \leq 6$]
Professora: Sim e a outra? Inferior ou igual a 10.
Aluno F: Assim? [escreveu a condição $0{,}4x + 0{,}2y \leq 10$]
Professora: Boa!

Os alunos, após a confirmação, preencheram a tabela relativa à etapa 2:

	Condição
x (quantidade de cavacas, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$x \geq 0$
y (quantidade de biscoitos de orelha, em kg) toma valores positivos ou nulos.	$y \geq 0$
A quantidade de farinha utilizada é inferior ou igual a 6 kg.	$0{,}2x + 0{,}3y \leq 6$
A quantidade de açúcar utilizada é inferior ou igual a 10 kg.	$0{,}4x + 0{,}2y \leq 10$

Figura 4.25: Resolução da etapa 2, da tarefa 1B, pelo par EF

Na resolução da etapa 3, começaram por resolver as inequações em ordem a y $\left(y \leq \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3} \quad \text{e} \quad y \leq \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2} \right)$ e, de seguida, introduziram as expressões algébricas das funções na calculadora gráfica, optando, desta forma, pela resolução gráfica da etapa.

Após o diálogo com a professora, verificaram que tinham colocado, por distração, o valor 0,2 de uma das funções a multiplicar em vez de dividir:

Aluno F: Agora temos de resolver.
Aluna E: Temos de resolver as inequações.
Aluno F: Temos de ajustar. Professora como é que eu aqui…
Professora: Colocaste parênteses?
Aluno F: Sim, e já mexi no *window*…
Professora: 6 menos $0{,}2x$ a dividir por 0,3 está certo. Mas esta… vezes ou dividir?

De seguida, determinaram, através dos comandos *value*, *intersect* e *zero* da calculadora gráfica *Texas*, as coordenadas dos vértices $(0,20)$, $(22{,}5;5)$ e $(25,0)$ do polígono obtido. Através do comando *value*, determinaram o vértice de coordenadas $(0,20)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$ com o eixo Oy, com o comando *intersect*, determinaram o vértice de coordenadas $(22{,}5;5)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y = \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3}$ e $y = \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$ e através do comando *zero*, determinaram o vértice de coordenadas $(25,0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2}$ com o eixo Ox.

Aluno F: Este aqui é para baixo. Este para aqui…
Aluna E: Esta é a região… Professora…
Professora: Se a região é esta, então encontrem os vértices.
Aluno F: Aqui é o (0, 20).

Organizaram a resposta, embora tenham trocado o sinal da desigualdade nas duas primeiras condições, não tenham utilizado uma escala correta, não tenham sombreado a região admissível e não tenham colocado uma das coordenadas obtidas no ponto certo:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 0{,}2x + 0{,}3y \leq 6 \\ 0{,}4x + 0{,}2y \leq 10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ 0{,}3y \leq 6 - 0{,}2x \\ 0{,}2y \leq 10 - 0{,}4x \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \\ y \leq \dfrac{6 - 0{,}2x}{0{,}3} \\ y \leq \dfrac{10 - 0{,}4x}{0{,}2} \end{cases}$$

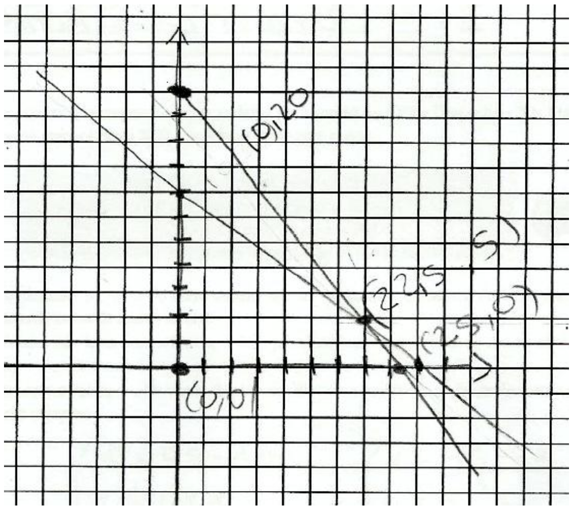


Figura 4.26: Resolução da etapa 3, da tarefa 1B, pelo par EF

De seguida, os alunos calcularam o valor da função lucro em cada um dos vértices do polígono obtido, utilizando a calculadora gráfica para efetuar os cálculos:

Aluna E: Mas agora o lucro…
Aluno F: Professora, para calcular o lucro precisamos da função, não é?
Professora: Sim.
Aluna E: Esta é a função lucro.
Aluno F: Agora é só substituir.

$$f(0,20) = 5 \times 0 + 7 \times 20 = 140$$
$$f(22{,}5, 5) = 5 \times 22{,}5 + 7 \times 5 = 147{,}5$$
$$f(25,0) = 5 \times 25 + 7 \times 0 = 125$$
$$f(0,0) = 5 \times 0 + 7 \times 0 = 0$$

Figura 4.27: Resolução da etapa 5, da tarefa 1B, pelo par EF

Por último, os alunos concluíram que a D. Maria deve produzir 22,5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos de orelha de forma a rentabilizar o lucro:

R: Ela deve produzir 22,5 kg de cavacas e 5 kg de biscoitos de orelha.

Figura 4.28: Resolução da etapa 6, da tarefa 1B, pelo par EF

4.3.4. Desempenho do par EF na tarefa 2

Na resolução da tarefa 2, os alunos tentaram seguir alguns procedimentos adotados na resolução da tarefa 1B (definir as variáveis e a função objetivo; identificar as restrições do problema; construir o modelo matemático; obter a solução ótima), devido à sua semelhança, mas revelaram bastantes dificuldades na interpretação do enunciado que só conseguiram ultrapassar com a ajuda da professora. Começaram por tentar definir as variáveis e escrever as restrições do problema:

Aluno F: Isto é parecido ao outro que fizemos. Aqui o 45. Depois o número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial… Acho que devemos ter de fazer as condições.
Aluna E: Mas primeiro temos de definir o x e o y.
Aluno F: Na mala do carro só cabem 45 bolas.
Aluna E: Vamos fazer uma tabela. É o mais difícil, o resto é fácil.
Aluno F: Pois, é assim: marca oficial, marca SOL. Professora, podia vir aqui? Aqui se forem 10 bolas são 12€, não é?
Professora: Porque é que são 10?
Aluno F: Aqui diz 10…
Professora: Não. Atenção que o que diz é que a promoção só é válida para compras superiores a 10 bolas!

Os alunos continuaram a revelar dificuldades na interpretação do enunciado e na determinação do lucro de cada bola. Parecem não confiar nos seus conhecimentos matemáticos, até mesmo para efetuar cálculos relativamente simples, e nem sempre conseguem utilizar e transpor os conteúdos estudados em contexto de sala de aula para situações semelhantes.

Aluno F: Professora estamos com dúvidas aqui [apontando].
Professora: O número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial. Ok… como escrevemos em linguagem matemática? Já definiram as variáveis? O que representa x? E y?
Aluno F: …
Professora: Como é que querem escrever se ainda não definiram as variáveis?
Aluno F: Ok… Não é assim?
Professora: Quanto custa cada bola da marca oficial?
Aluno F: …
Professora: Qual é o preço de cada bola?
Aluno F: Doze.
Professora: A que valor é que quer vender cada bola?
Aluno F: Catorze.
Professora: Então quanto é o lucro?
Aluna E: Dois euros.
Aluno F: Então fica $2x$.
Professora: Agora as outras… se ele vai comprar a 8 e vender a 11, quanto é que é o lucro?
Aluno F: Três.

Após definirem as variáveis (com pouco rigor visto que, na resposta, onde se lê "marca oficial" e "marca SOL" deveria ler-se, por exemplo, "bolas de marca oficial" e "bolas da marca SOL") e determinarem o lucro de cada bola, o par EF organizou a informação necessária numa tabela:

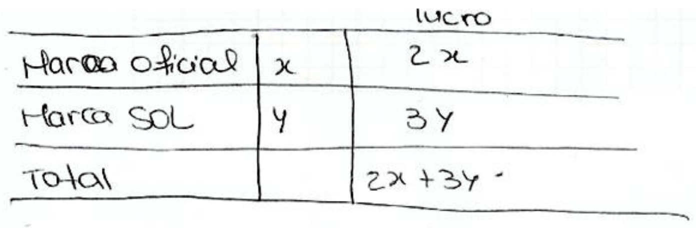


Figura 4.29: Definição das variáveis e organização dos dados da tarefa 2, pelo par EF

Após a organização da informação, começaram a registar as restrições do problema. Mais uma vez, houve necessidade da professora intervir no sentido de orientar e permitir que os alunos continuassem com a resolução da tarefa.

Verificou-se, tal como na resolução da tarefa 1, que os alunos apresentaram dificuldades na tradução do que leram no enunciado para linguagem matemática, o que compromete toda a resolução da tarefa:

Professora: Ele só pode beneficiar desta promoção se comprar mais de 10 bolas de marca oficial. Como se escreve isto agora?
Aluna E: $x > 10$.
Professora: O número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial. Como se escreve em linguagem matemática?
Aluno F: …
Professora: Qual é o número de bolas da marca SOL?
Aluno F: x … não, 45.
Professora: Número de bolas da marca SOL??
Aluno F: y .
Professora: Então escrevam…
Aluno F: $y \leq 2x$.

De seguida, escreveram as restrições do problema:

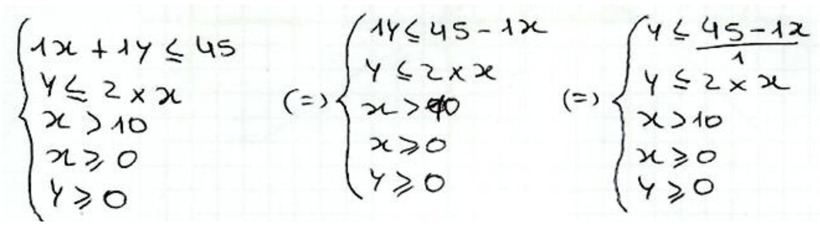


Figura 4.30: Identificação das restrições do problema da tarefa 2, pelo par EF

Os alunos optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica, começando por introduzir as expressões analíticas das funções na calculadora.

É notória a insegurança destes alunos no trato da calculadora gráfica ("a minha calculadora mudou sozinha") e também são visíveis lacunas ao nível de conhecimentos matemáticos (dificuldades na representação de retas verticais):

Aluno F: Não sei como isto mudou sozinho… Professora, a minha calculadora mudou sozinha! Professora podia vir aqui? Aqui é um zero… pode ficar assim, não pode?
Aluno F: Isto ficou assim de um momento para o outro.
Professora: E então?
Aluno F: O que é que faço a esta?
Professora: Todas as funções estão representadas?
Aluno F: Menos esta [apontando].
Professora: Representem a reta.

Aluno F: Mas eu não consigo.
Professora: Porquê?
Aluno F: Na calculadora não consigo fazer com o x [referindo-se às retas verticais].
Professora: Pois… mas com a tua cabecinha tu consegues.
Aluna E: [desenhou]
Professora: Ah! Pronto. Qual é a região que nos interessa?
Aluno F: Está aqui.

Após identificarem a região admissível, seguiram para a determinação das coordenadas dos vértices do polígono obtido, utilizando os comandos *intersect*, *value* e *zero* da calculadora gráfica *Texas*. Com o comando *intersect*, determinaram o vértice de coordenadas $(15, 30)$, ponto de interseção das funções de expressões analíticas $y = 2x$ e $y = 45 - x$, com o comando *value*, determinaram o vértice de coordenadas $(10, 20)$, ponto de interseção da reta de equação $x = 10$ com a função de expressão analítica $y = 2x$ e com o comando *zero*, determinaram o vértice de coordenadas $(45, 0)$, ponto de interseção da função de expressão analítica $y = 45 - x$ com o eixo Ox.

São novamente notórias as lacunas dos alunos relativamente a conceitos matemáticos essenciais para a resolução da tarefa proposta (trocam o x com o y nas coordenadas) e a falta de domínio das potencialidades da calculadora gráfica (não determinam a imagem do objeto 10 na função pretendida), embora tenham memorizado alguns dos seus comandos. Os alunos parecem acreditar nos resultados que observam no ecrã da calculadora, sem os questionar:

Professora: Pintem a região e encontrem os vértices deste polígono. Dois deles já os têm, encontrem os outros. Qual é este?
Aluno F: $(0, 10)$.
Professora: Ao contrário!
Aluno F: $(10, 0)$.
Professora: Só falta este. Como o vão encontrar?
Aluno F: Metemos no *value*.
Professora: Boa!
Aluno F: Se metemos *x* igual a 10 dá *y* igual a 35.
Aluna E: Então $(10, 35)$.
Professora: Deixem-me ver… parece-me bem. Mas... como é que aqui é o 35 e aqui é 30? (corrigindo a escala)
Aluno F: É o *value*… Meto quando *x* é zero?
Professora: Queres a imagem de zero?
Aluno F: Não.
Professora: Então queres o quê?
Aluno F: Aqui é 10. A imagem é 35.
Professora: Mas é esta função que queres?
Aluno F: Não.
Professora: Então faz outra vez, para a outra função. Quanto deu?
Aluno F: Vinte.
Professora: Agora parece-me bem.

Após determinarem as coordenadas dos vértices do polígono obtido, representaram as funções num referencial cartesiano, embora não tenham sido rigorosos relativamente à escala:

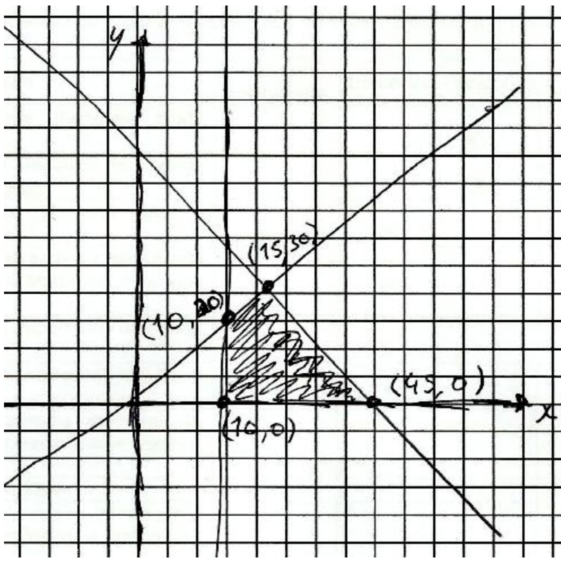


Figura 4.31: Representação da região admissível do problema da tarefa 2, pelo par EF

Por último, os alunos não calcularam corretamente o valor da função lucro em cada um dos vértices do polígono e, consequentemente, não identificaram a solução ótima e não interpretaram nem refletiram sobre os resultados obtidos:

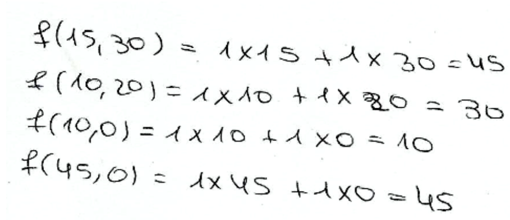


Figura 4.32: Cálculo do valor da função lucro em cada um dos vértices do polígono do problema da tarefa 2, pelo par EF

Os alunos, à semelhança da resolução da tarefa 1, não revelaram autonomia, embora o seu desempenho na tarefa 1 tenha sido melhor, visto que deram resposta ao problema.

A resolução desta tarefa foi uma forma de aprendizagem para estes alunos, tanto ao nível de conteúdos matemáticos como ao nível de manuseamento da calculadora gráfica.

É de salientar que o distanciamento da realidade e o desejo de aplicar os conhecimentos aprendidos em aulas anteriores pode ter afetado o desempenho destes alunos, visto que na tarefa 1A estes foram bastante mais críticos e reflexivos.

4.3.5. Síntese do desempenho do par EF

Na resolução da tarefa 1A, os alunos do par EF sentiram bastantes dificuldades na interpretação do enunciado, ficando dependentes da sua explicação e invalidando, desta forma, a resolução da tarefa de forma autónoma.

Após compreenderem o enunciado, procuraram a produção mais rentável para a D. Maria, fazendo tentativas de várias possibilidades para as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha, tendo em consideração as quantidades disponíveis de açúcar e de farinha, através da estratégia de tentativa e erro.

Preocuparam-se, inicialmente, em encontrar uma solução que envolvesse quantidades iguais de biscoitos de orelha e de cavacas e que utilizasse a quantidade total de farinha disponível. Após encontrarem uma solução nestas condições, foram verificar qual a quantidade de açúcar necessária à sua confeção. Como verificaram que a quantidade de açúcar era superior à quantidade disponível, optaram por procurar outras soluções, tendo a preocupação de que as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar não fossem superiores às quantidades disponíveis e que a produção de biscoitos de orelha fosse superior à produção das cavacas.

Mais pormenorizadamente, inicialmente, calcularam a quantidade de farinha necessária para a confeção de 3 kg de cavacas e de 3 kg de biscoitos de orelha e, de seguida, como verificaram que a quantidade de farinha utilizada com esta produção era bastante inferior à disponível, decidiram aumentar a quantidade de cavacas e de biscoitos de orelha para 7 kg e determinaram as quantidades de farinha e de açúcar necessárias (tendo como objetivo utilizar toda a farinha disponível). De seguida, aumentaram as quantidades de doçaria para 12 kg e verificaram que com estas quantidades utilizavam toda a farinha disponível. Os alunos decidiram procurar, de seguida, outra solução em que utilizassem também a totalidade de açúcar disponível e determinaram a quantidade de farinha a utilizar na confeção de 10 kg de cavacas e de 10 kg de biscoitos de orelha. Como a quantidade de farinha não totalizou os 6 kg, determinaram as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar na confeção de 5 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha e como com estas quantidades ultrapassavam o total de farinha disponível, determinaram a quantidade de farinha a utilizar na confeção de 5 kg de cavacas e de 19 kg de biscoitos de orelha e de 5 kg de cavacas e de 17 kg de biscoitos de orelha. De seguida, determinaram as quantidades de farinha e de açúcar necessárias à confeção de 4 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha, de 4 kg de cavacas e de 19 kg de biscoitos de orelha, de 4 kg de cavacas e de 17 kg de biscoitos de orelha e de 1 kg de cavacas e de 20 kg de biscoitos de orelha. Concluíram que a melhor solução que encontraram foi a confeção de 12 kg de cavacas e de 12 kg de biscoitos de orelha, visto o seu lucro ser maior. Para esta produção, eram necessários 7,2 kg de açúcar e 6 kg de farinha.

Na tarefa 1A, calculadora foi utilizada para efetuar todos os cálculos aritméticos.

Na resolução da tarefa 1B, os alunos leram e interpretaram o problema, já conhecido da tarefa 1A. Necessitaram da orientação da professora no preenchimento das tabelas da etapa 1 e na escrita em linguagem matemática e foram capazes de representar as funções graficamente e de identificar e utilizar os comandos da calculadora na determinação das coordenadas dos vértices do polígono obtido.

Os alunos demonstraram falta de rigor matemático e dificuldades em aplicar o que foi trabalhado em aulas anteriores (trocaram o sinal da desigualdade na escrita das condições, não utilizaram uma escala correta nos eixos do referencial, não colocaram as coordenadas obtidas junto do vértice correspondente), talvez devido à insegurança e às lacunas existentes ao nível do conhecimento matemático.

O par EF resolveu a tarefa 2 de uma forma muito pouco autónoma e com dificuldades. Como as dificuldades sentidas na interpretação do enunciado são um impedimento para a resolução correta do problema, necessitaram de orientação para conseguirem avançar na resolução. Houve também necessidade da intervenção da professora relativamente à determinação do lucro de cada bola, à escrita das restrições do problema e à representação gráfica das funções. Os alunos definiram as variáveis, organizaram a informação retirada do enunciado numa tabela, representaram as funções graficamente, identificaram a região admissível, determinaram, com a ajuda dos comandos da calculadora gráfica, as coordenadas dos vértices do polígono obtido e calcularam o valor da função lucro em cada um dos vértices do polígono. No entanto, não identificaram a solução ótima.

A resolução desta tarefa foi uma forma de aprendizagem para estes alunos, tanto ao nível de conteúdos matemáticos como ao nível de manuseamento da calculadora gráfica.

Nesta tarefa, também foi visível a falta de rigor matemático (na definição das variáveis, onde se lê "marca oficial" e "marca SOL" deveria ler-se, por exemplo, "bolas de marca oficial" e "bolas da marca SOL"), alguma insegurança e algumas lacunas ao nível do conhecimento matemático (troca nos valores das coordenadas, dificuldades na representação de retas verticais).

Nas tarefas 1B e 2 os alunos aplicaram o que foi trabalhado em aulas anteriores e, após a escrita do problema em linguagem matemática, apresentaram alguma capacidade de resolução e de aplicação de ferramentas matemáticas. Optaram por uma abordagem em que privilegiaram o uso da calculadora gráfica e utilizaram esta ferramenta para efetuar cálculos aritméticos, para representar funções graficamente e para determinar as coordenadas dos vértices da região admissível, embora revelassem falta de domínio das suas potencialidades. Os alunos pareciam acreditar nos resultados que observavam no ecrã da calculadora, sem os questionar.

É de salientar que o distanciamento da realidade e o desejo de aplicar os conhecimentos aprendidos em aulas anteriores pode ter afetado o desempenho destes alunos, visto que na tarefa 1A estes foram bastante mais críticos e reflexivos.

Capítulo 5. Conclusão

Uma grande finalidade da matemática é contribuir para o desenvolvimento dos indivíduos, tornando-os aptos para uma participação completa na sociedade, garantindo que estes interpretem e modelem situações reais e que lidem com ideias matematicamente ricas (Ponte, 2002). Neste sentido, Pólya (1957) defende que só através da resolução de problemas não rotineiros, os alunos podem desenvolver as suas capacidades e Onuchic (2013) refere que é bastante importante, ao nível da cidadania, a competência de analisar um problema e tomar as decisões fundamentais à sua resolução.

A abordagem da Programação Linear é, assim, importante para que os alunos se familiarizem com situações de gestão do dia a dia e para que possam desenvolver competências com o objetivo de tomar decisões corretas em termos de gestão e planeamento (Neves, 2011).

Segundo as indicações do Ministério da Educação (2004, p. 50), "a resolução de problemas, com apoio fundamentado e crítico da tecnologia, mantém-se como centro de toda a motivação para a matemática em cada atividade". No programa de matemática para os cursos profissionais, é destacada a obrigatoriedade do uso de calculadoras gráficas como ferramentas essenciais (Ministério da Educação, 2004). Entre várias potencialidades, a calculadora gráfica proporciona oportunidades de aprofundar conteúdos matemáticos (Ponte & Canavarro, 1997; Silva & Seixas, 2010), permite que os alunos participem ativamente no processo de ensino-aprendizagem, propicia a partilha de ideias (Ponte & Canavarro, 1997), proporciona momentos de discussão (Gracias & Borba, 2000; Ponte & Canavarro, 1997) e permite a modelação de situações reais (Ponte & Canavarro, 1997; Rocha, 2011a).

Com este estudo, pretendeu-se averiguar como alunos do 11.º ano do ensino profissional, com níveis distintos de conhecimentos e diferentes motivações pela disciplina, resolvem problemas de Programação Linear com recurso à calculadora gráfica. Concretamente, pretendeu-se responder às seguintes questões:

i) Como é que os alunos analisam e interpretam o enunciado de problemas de Programação Linear?

ii) Quais as estratégias adotadas pelos alunos na resolução de problemas de Programação Linear?

iii) Como é que os alunos utilizam a calculadora gráfica na resolução de problemas de Programação Linear?

iv) Como interagem os alunos entre si e com a professora na resolução de problemas de Programação Linear?

A metodologia adotada foi de caráter qualitativo e interpretativo, privilegiando-se o estudo de caso, visto que se pretendia analisar uma situação específica e bem delimitada.

Os intervenientes deste estudo foram três pares de alunos, nomeados como par AB, par CD e par EF, com níveis distintos de conhecimentos e diferentes motivações pela disciplina, sendo o par AB aquele que demonstra ter melhor nível de desempenho e mais interesse pela disciplina e o par EF o que revela mais dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos e menos interesse em relação à disciplina.

As conclusões que, de seguida, se apresentam resultam da análise das informações recolhidas através da observação participante, das resoluções efetuadas pelos três pares de alunos, das notas de campo, da gravação em áudio dos diálogos estabelecidos pelos pares de alunos durante as aulas e da realização de um questionário final.

5.1. Análise e interpretação do enunciado

Os alunos nem sempre conseguem interpretar e aplicar estratégias relacionando os elementos presentes no enunciado, mesmo aqueles que têm mais sucesso à disciplina. No entanto, uma análise dos elementos recolhidos ao longo deste estudo sugere uma relação entre o nível de desempenho dos alunos na disciplina e a facilidade de interpretação da informação disponibilizada no enunciado. Tal é patente na forma como os alunos do par AB, que apresentam um melhor nível de desempenho, interpretam e compreendem o enunciado dos problemas, e nas dificuldades evidenciadas pelo par EF, que tendo um nível inferior no que respeita à compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos, bem como um menor interesse pela disciplina, revela muitas dificuldades ao nível da interpretação e compreensão do enunciado. Verificou-se que o aspeto mais delicado diz respeito à interpretação e, consequentemente, à escrita em linguagem matemática das condições dos problemas propostos: em geral, os alunos sentiram dificuldades na interpretação da condição relativa às quantidades disponíveis de açúcar e de farinha, na tarefa 1, e na compreensão da quantidade total de bolas a comprar e da relação entre o número de bolas de andebol das duas marcas, na tarefa 2.

Os alunos do par AB começaram por ler atentamente o enunciado do problema e, após uma primeira análise, retiraram e organizaram, numa tabela, as informações consideradas importantes para a resolução do mesmo. Na tarefa 1 perceberam que o que se pretendia era procurar as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a confecionar, de modo a obter o maior lucro possível, tendo em conta as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis. Na tarefa 2 começaram por definir as variáveis e organizaram as informações que retiraram do enunciado do problema, numa tabela. De seguida, procuraram calcular o valor do lucro da venda de cada tipo de bola e escreveram as condições do problema.

Os alunos do par CD também leram atentamente o enunciado do problema e retiraram e organizaram, numa tabela, as informações que consideraram importantes. Estes alunos, na tarefa 1, compreenderam que o que se pretendia era procurar as quantidades de biscoitos de orelha e de cavacas a confecionar de modo a obter o maior lucro possível, mas, no entanto, apresentaram dificuldades relativamente à compreensão das quantidades disponíveis de farinha e de açúcar. Na tarefa 2, perceberam que o que se pretendia era determinar o número de bolas de marca oficial e o número de bolas da marca SOL de forma a obter o maior lucro possível, embora não tenham compreendido que o José tinha sempre de comprar mais de dez bolas de marca oficial, para beneficiar da promoção, e que o número de bolas da marca SOL deveria ser inferior ao número de bolas de marca oficial.

Os alunos do par EF demonstraram muitas dificuldades na interpretação e na compreensão dos enunciados das tarefas, ficando dependentes da explicação do enunciado e, invalidando, desta forma, a resolução das tarefas de forma autónoma. Optaram por fazer uma leitura completa do enunciado, mas ficaram bastante confusos e não conseguiram estruturar um raciocínio conciso e coerente com base no que leram.

5.2. Estratégias adotadas na resolução de problemas

Relativamente às estratégias adotadas pelos alunos na resolução de problemas de Programação Linear verificou-se que todos os alunos resolveram a tarefa 1A através da estratégia de tentativa e erro, não sendo marcante, para a forma como o fizeram, o nível de conhecimentos dos alunos. Os alunos começaram por abordar o problema determinando o lucro obtido em cada tipo de doçaria, mas, a certa altura, perdem o foco de olhar para o lucro, e procuram apenas soluções possíveis, preocupando-se, essencialmente, com as restrições do problema, isto é, procuram encontrar soluções (quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar) em que as quantidades de açúcar e de farinha a utilizar não ultrapassem as quantidades disponíveis. O lucro é calculado depois de encontrarem uma possível solução, no final das várias tentativas, sem que seja visível qualquer estratégia para assegurar que essa é a melhor solução. É de salientar, no entanto, que o par CD procura sempre soluções em que a quantidade de biscoitos de orelha é superior à quantidade de cavacas, visto que o lucro com a venda de biscoitos de orelha é superior ao da venda de cavacas.

Na procura das quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar de forma a obter o lucro máximo, os alunos do par AB preocuparam-se, inicialmente, em encontrar as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar de forma a utilizar todo o açúcar disponível e, posteriormente, após encontrarem uma solução possível, verificar se a quantidade de farinha necessária era inferior ou igual à disponível. Como aferiram que a quantidade de farinha necessária à confeção da solução encontrada era superior à quantidade disponível, procuraram outras soluções possíveis, diminuindo a quantidade de doçaria a confecionar, tendo a preocupação de que as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar não fossem superiores às quantidades disponíveis. Os alunos do par CD tiveram sempre o cuidado de procurar soluções em que a quantidade de biscoitos de orelha fosse superior à quantidade de cavacas, visto o lucro destes ser maior. Inicialmente, preocuparam-se em determinar apenas a quantidade de biscoitos de orelha a confecionar com os 6 kg de farinha (quantidade disponível), de seguida com os 10 kg de açúcar (quantidade disponível), com os 3 kg de farinha (metade da quantidade disponível), com os 5 kg de açúcar (metade da quantidade disponível) e com 9 kg de açúcar (de forma a confecionar cavacas com o quilograma restante). Por sugestão da professora, procuraram encontrar as quantidades de cavacas e de biscoitos de orelha a confecionar, tendo em consideração as quantidades de açúcar e de farinha disponíveis e o lucro a obter. Os alunos do par EF preocuparam-se, inicialmente, em encontrar uma solução que envolvesse quantidades iguais de biscoitos de orelha e de cavacas e que utilizasse a quantidade total de farinha disponível. Após encontrarem uma solução nestas condições, foram verificar qual a quantidade de açúcar necessária à sua confeção. Como verificaram que a quantidade de açúcar era superior à quantidade disponível, optaram por procurar outras soluções, tendo a preocupação de que as quantidades de farinha e de açúcar a utilizar não fossem superiores às quantidades disponíveis e que a produção de biscoitos de orelha fosse superior à produção das cavacas.

Na realização das tarefas 1B e 2, todos os alunos optaram por aplicar o que foi trabalhado em aulas anteriores, em exercícios semelhantes (representar conjuntos de pontos definidos por condições; definir analiticamente conjuntos de pontos; definir as variáveis; definir por um sistema de inequações lineares a região admissível relativa a um problema de Programação Linear; representar graficamente a região admissível; calcular as coordenadas dos vértices da região admissível; determinar as coordenadas do vértice da região admissível em que a função objetivo atinge o valor máximo/ mínimo).

O par AB aplicou os seus conhecimentos sem apresentar dificuldades, apresentou algum rigor matemático e privilegiou uma análise cuidada da informação recolhida. Resolveu as tarefas com bastante autonomia e, em geral, conseguiu definir as variáveis de decisão, definir a função objetivo, representar as funções graficamente, determinar as coordenadas dos vértices da região admissível, calcular o valor da função objetivo em cada um dos vértices da região admissível, identificar a solução ótima e interpretar os resultados obtidos. O par CD revelou algum conhecimento relativamente à aplicação dos conteúdos, apesar de manifestar alguma distração (em vez de escrever $x > 10$, escreveu $x \geq 10$, por exemplo), insegurança (são referidas, várias vezes, frases como "Isto não está nada bem", "Mas isto não pode ser", "Faz outra vez") e pouco rigor matemático (onde se lê "marca oficial" e "marca SOL" deveria ler-se, por exemplo, "número de bolas de marca oficial" e "número de bolas da marca SOL"), talvez relacionado com algumas lacunas existentes ao nível do conhecimento matemático. Apresentou alguma autonomia e conseguiu, em geral, definir as variáveis, representar as funções graficamente, identificar a região admissível, determinar as coordenadas dos vértices da região admissível, definir a função objetivo e calcular o seu valor em cada um dos vértices da região admissível e identificar a solução ótima. O par EF apresentou alguns conhecimentos matemáticos adquiridos em matérias lecionadas em aulas anteriores e, após a escrita do problema em linguagem matemática, apresentou alguma capacidade de resolução e de aplicação de ferramentas matemáticas, embora com dificuldades. Estes alunos evidenciaram também alguma distração (colocaram, por exemplo, o valor 0,2 a multiplicar em vez de a dividir), insegurança (solicitaram, várias vezes, que a professora verificasse a resolução antes de avançarem para o passo seguinte) e uma linguagem matemática pouco rigorosa (trocaram o sinal da desigualdade na escrita das condições, por exemplo). As várias dificuldades encontradas ao longo da resolução das tarefas prendem-se, talvez, com a falta de consolidação de conhecimentos. Estes alunos necessitaram que a professora verificasse grande parte das suas resoluções. Conseguiram definir variáveis e calcularam o valor da função objetivo em cada um dos vértices da região admissível. Apesar de não revelarem autonomia na resolução das tarefas, foram bastante persistentes e empenhados e solicitaram a ajuda da professora, nas diferentes etapas, de forma a prosseguir a resolução das tarefas.

Assim, verificou-se que os três pares de alunos resolveram os problemas passando por três das quatro etapas referidas por Pólya (1957): compreensão do problema (embora os alunos que apresentam mais dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos e menos interesse em relação à disciplina tenham ficado dependentes da explicação do enunciado), elaboração e execução de um plano. Os alunos não concretizaram a quarta etapa referida pelo autor, visto que não averiguaram se a solução obtida estava correta nem examinaram todo o processo efetuado.

Com a aplicação da tarefa 1B, pretendia-se introduzir o método de resolução de problemas de Programação Linear e, posteriormente, pretendia-se que os alunos resolvessem a tarefa 2 através do método, aplicando os conhecimentos matemáticos relativos à Programação Linear e reconhecendo o contributo da matemática para uma melhor tomada de decisões.

Apesar da tarefa 1B ser dirigida, na etapa 3, por exemplo, os alunos poderiam ter determinado as coordenadas dos vértices analiticamente, resolvendo equações, ou graficamente. Todos os alunos privilegiaram o método gráfico em detrimento do método analítico, utilizando os comandos da calculadora gráfica para determinar os vértices do polígono da região admissível.

Na resolução da tarefa 2 todos os alunos adotaram o método que seguiram na tarefa 1B, isto é, definiram as variáveis, definiram a região admissível por um sistema de inequações lineares e, com a ajuda da calculadora gráfica, representaram as funções graficamente e determinaram as coordenadas dos seus vértices. Posteriormente, para encontrar a solução ótima, calcularam o valor da função objetivo em cada um dos vértices determinados, privilegiando, neste caso, o método analítico e a utilização da calculadora gráfica para efetuar cálculos. É de salientar que os alunos poderiam, por exemplo, ter encontrado a solução ótima traçando retas de nível paralelas à reta de nível zero, até ao último ponto de contacto com a região admissível (no sentido de crescimento) mas optam por escolher uma abordagem em que privilegiam o uso da calculadora gráfica.

É interessante notar que os alunos que revelam mais dificuldades na compreensão e aplicação de conhecimentos matemáticos e menos interesse pela disciplina desenvolveram raciocínios mais concretos na resolução da tarefa 1A, apresentando mais sucesso nesta. Na resolução das tarefas 1B e 2, os alunos distanciaram-se da realidade e preocuparam-se, sobretudo, em resolvê-las matematicamente.

É pertinente refletir relativamente à implementação de métodos de resolução (de problemas, neste caso em concreto) na educação dos nossos alunos: será que estamos a arruinar o pensamento livre e a criar alunos programados, desrespeitando o raciocínio individual e a educar em massa? Sem intenção de generalizar, constatou-se, neste caso em concreto, que com a implementação do método os alunos referidos preocuparam-se essencialmente em seguir a “receita” sugerida e em não errar matematicamente, afastando-se da realidade.

Tal como identificado pelo Ministério da Educação (2004), por Neves (2011) e por Melo (2012), também neste estudo se verificou a aplicabilidade da Programação Linear em situações do dia a dia e a importância da resolução de problemas na aprendizagem da matemática.

5.3. Utilização da calculadora gráfica

Verificou-se que todos os alunos optam por escolher uma abordagem em que privilegiam o uso da calculadora gráfica, sendo esta uma ferramenta de apoio ao trabalho desenvolvido. Os alunos utilizaram a calculadora gráfica para efetuar cálculos, para elaborar gráficos e para determinar as coordenadas dos vértices da região admissível. Sentiram alguma dificuldade na escrita das expressões analíticas das funções, o que vai de encontro às conclusões do estudo elaborado por Rocha (2004). Observou-se também uma falta de sensibilidade relativamente aos valores inseridos na janela de visualização, visto que, por exemplo, não tiveram em conta que as variáveis tomam apenas valores positivos ou nulos.

Os alunos do par AB não revelaram dificuldades relativamente ao modo de utilização da calculadora gráfica e foram capazes de identificar os comandos que tinham de utilizar na resolução das tarefas propostas. Os alunos dos pares CD e EF, apesar de terem memorizado alguns dos comandos da calculadora gráfica, revelaram falta de domínio das suas potencialidades.

Verifica-se que os resultados obtidos neste estudo estão em consonância com conclusões de alguns autores relativamente à utilização da calculadora gráfica como promotora de aprendizagens: Ponte e Canavarro (1997) e Gracias e Borba (2000) referiram que esta proporciona aos alunos momentos de discussão; Ministério da Educação (2004) refere que a calculadora gráfica permite proceder de forma rápida à verificação de certos resultados; Rocha (2001) concluiu que permite a confirmação de cálculos aritméticos e de resultados; Ponte e Canavarro (1997) e Rocha (2011) concluíram que a calculadora gráfica permite a modelação de situações reais, construindo o modelo com base na interpretação da situação.

5.4. Interação dos alunos entre si e com a professora

Com a resolução das tarefas em pares, verificou-se que os alunos trocaram conhecimentos, assumindo uma postura de diálogo e de discussão. Souberam ouvir e questionar o colega de trabalho com o intuito de se entreajudarem, de aprenderem e de solucionarem a tarefa proposta.

Para além de aprenderem/ aprofundarem conhecimentos matemáticos, desenvolveram o respeito, a cooperação e a compreensão.

Ao longo da resolução das tarefas, os alunos solicitaram a professora sempre que surgiram dúvidas e para confirmar resultados e raciocínios. A professora procurou orientar e auxiliar os alunos, esclarecendo dúvidas para que estes pudessem progredir nas suas resoluções e averiguando sobre a exatidão do seu trabalho. Este modo de atuar está de acordo com as ideias defendidas por Pólya (1945), Marques e Caetano (2002) e Onuchic (2013). De acordo também com as ideias defendidas por Melo (2012), Pólya (1945) e Santos e Ponte (2002), a professora utilizou o questionamento para incentivar, para corrigir alguns erros e para fomentar a reflexão e, tal como sustentado por Onuchic e Allevato (2011), utilizou ainda o questionamento para que os alunos construíssem o seu próprio conhecimento.

É de salientar que embora a investigadora tenha presente que o pretendido era que os alunos resolvessem os problemas propostos pelos seus próprios meios e que o seu papel consistia em agir como intermediário entre os conteúdos da aprendizagem e a atividade proposta, tal nem sempre foi fácil e, por vezes, orientou os alunos, não permitindo que estes escolhessem sempre as suas próprias estratégias e métodos de resolução, com o intuito de que estes obtivessem a solução mais rapidamente e eficazmente.

Em trabalhos futuros, sugere-se uma maior disponibilização de tempo para a realização de cada problema, de forma a permitir que os alunos reflitam e apliquem as suas capacidades, calmamente. O duplo papel de professora e investigadora foi também uma limitação deste estudo. Observar profundamente e orientar o desenvolvimento de uma aula, da forma mais imparcial e rigorosa possível, é uma tarefa desgastante. Assim, seria vantajoso um outro professor observar a aula, de forma a recolher um maior número de dados e analisar mais pormenorizadamente o desempenho de cada par de alunos.

Em futuras investigações, entende-se ser pertinente desenvolver um estudo recorrendo ao uso de *softwares* de Programação Linear, como, por exemplo, a ferramenta *Solver* do *Excel*. Estudar as vantagens do computador na exploração de problemas de Programação Linear e compará-las com as vantagens da utilização da calculadora gráfica, seria uma forma de enriquecer o trabalho realizado.

Referências Bibliográficas

Abrantes, P. (1989). Um (bom) problema (não) é (só)… *Educação e Matemática*, 8, 7-10 e 35.

Albergaria, I. S., & Ponte, J. P. (2008). Cálculo mental e calculadora. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Eds.), *Tecnologias e educação matemática* (pp. 98-109). Lisboa: SEM-SPCE.

APM (1988). *Renovação do currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

Barros, P.M., Pereira, A. I., & Teixeira, A. P. (2010). À descoberta de software para explorar a programação linear no ensino secundário. In A. Breda, A. F. Mota, A. Monteiro, A. Martins, D. Fernandes, E. Nolasco, G. Barbosa, J. Carvalho e Silva, L. Costa, M. B. Pereira, M. T. Santos, T. B. Neto, T. Castanhola & Y. Catarino (Org.), *Atas do ProfMat 2010.* Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Carvalho, J. M. S. (2014). *Programação Linear - Algoritmos simplex primal, dual, transporte e afetação*. Porto: Grupo Editorial Vida Económica.

Consciência, M. M. C. (2013). *A calculadora gráfica na aprendizagem das funções no ensino secundário.* Dissertação de doutoramento, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal.

Dallazen, A. B., & Scheffer, N. F. (2003). *Calculadora gráfica no ensino e aprendizagem matemática*. Acedido em 12 de abril, 2016, de http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Encontro_Gaucho_Ed_Matem/cientificos/CC22.pdf.

Doerr, H. & Zangor, R. (2000). *Creating Meaning for and with the Graphing Calculator. Educational Studies in Mathematics*, 41, 143-163.

Eley, O. (2013). Developing a criterion for optimal in mathematical modelling. In B. Ubuz, Ç. Haser & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME8, 6-10 February 2013)* (pp. 1052-1059). Manavgat-Side, Antalya, Turkey: Middle East Technical University, Ankara, Turkey and ERME.

English, L., Lesh, R., & Fennewald, T. (2008). Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. Paper presented at ICME 11, Topic Study Group 19 – Research and development in problem solving in mathematics education. Monterrey, Mexico.

Ferreira, D. S., Ferreira, A. M., Carvalho, P. C. & Carvalho, J. C. (2010). *Matemática – Módulo A10 – Ensino Profissional*. Porto: Areal Editores.

Gazzoni, A. & Ost, A. (2009). A resolução de um problema: soluções alternativas e variações na formulação. *Vidya*, *28* (2), 37-45.

Goldbarg, M. C., Luna, H. P. L. & Goldbarg E. F. (2015). *Programação Linear e fluxos em redes (1. Ed).* Rio de Janeiro: Elsevier Editora.

Guin, D., & Trouche L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 3(3), 195-227.

Gracias, T. S. & Borba, M. C. (2000). Explorando possibilidades e potenciais limitações de calculadoras gráficas*. Educação e matemática*, 56, 35-39.

Graham, T., Headlam, C., Honey, S., Sharp, J. & Smith, A. (2003). The Use of Graphics Calculators by Students in an Examination: What do they really do? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34 (3), 319-344.

Magalhães, M. G., & Martinho, M. H. (2011). A calculadora gráfica como instrumento para o desenvolvimento da argumentação matemática. In A. Caseiro, A. Henriques, A. Silvestre, C. Nunes, H. Jacinto, H. Pinto & J. P. Ponte (Org.), *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 791-806). Lisboa: APM.

Marques, A. C. & Caetano, J. S. (2002). *Utilização da Informática na Escola.* In Mercado, L. P. L. (Org.), Novas Tecnologias na Educação: reflexões sobre a prática. Maceió: Edufal.

Melo, J. N. B. (2012). *Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no ensino médio*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil.

Milani, W. N. (2011). *A resolução de problemas como ferramenta para a aprendizagem de progressões aritméticas e geométricas no ensino médio.* Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Brasil.

Ministério da Educação (2004). *Matemática, Cursos Profissionais de Nível Secundário*. Lisboa: ME.

Neves, J. F. M. (2011). *A programação linear no ensino secundário.* Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro, Portugal.

Onuchic, L. R. (2013). A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico, 20* (1), 88-104.

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspetivas. *Boletim da Educação Matemática, 25* (41), 73-98.

Paiva, S. M. A. (2008). *A programação linear no ensino secundário.* Dissertação de mestrado, Universidade Portucalense Infante D. Henrique, Portugal.

Pólya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of the mathematical method*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2002). *O ensino da matemática em Portugal: Uma prioridade educativa?* (Conferência realizada no Seminário sobre “O Ensino da Matemática: Situação e Perspectivas”, promovido pelo Conselho Nacional de Educação, em Lisboa, no dia 28 de Novembro de 2002).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular (*pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25*, 105-132.

Ponte, J. P., & Canavarro, P. (1997). *Matemática e novas tecnologias*. Lisboa: Universidade Aberta.

Rafael, A. O. N. (2014). *Programação linear e algumas extensões*. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Ciências, Universidade do Porto, Portugal.

Rocha, H. (2001). Calculadoras gráficas: Que utilização? In I. C. Lopes & M. C. Costa (Org.), *Atas do XII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 233-252). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2002a). A calculadora gráfica em momentos de avaliação formal. In L. Menezes, H. Cunha & F. Tavares (Org.), *Atas do XIII Seminário de Investigação em Educação Matemática* (pp. 255-266). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2002b). A utilização que os alunos fazem da calculadora gráfica nas aulas de Matemática. *Quadrante, 11*(2), 3-28.

Rocha, H. (2004). Dificuldades associadas à utilização da calculadora gráfica. In A. Fazendeiro, A. Teixeira, A. Vieira, C. Leiria, C. Loureiro, G. Veloso, G. Dias, H. Vilarinho, I. Coelho, I. Mendes, L. Mesquita, M. Saraiva, N. Candeias, O. Xistra, P. Almeida, R. Bichinho, R. Silva & S. Nogueira (Org.), *Atas do ProfMat 2004* (pp. 212-217). Lisboa: APM.

Rocha, H. (2011a). A calculadora gráfica e a utilização que dela fazemos. *Educação e matemática*, 112, 41-42.

Rocha, H. (2011b). A prática profissional num contexto de utilização da calculadora gráfica. In A. Fraga, A. S. Martins, E. Barbosa, H. M. Oliveira, J. P. Ponte, M. J. Delgado, M. J. C. Oliveira, M. L. Serrazina, M. T. Santos, N. Valério, P. Teixeira, R. Bastos, R. Candeias, S. Delgadinho & S. Nápoles (Org.), *Atas do ProfMat 2011.* Lisboa: APM.

Santos, L., & Ponte, J. P. (2002). A prática letiva como atividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. *Quadrante, 11*(2), 29-54.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projeto MPT. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM)

Silva, D., & Seixas, S. (2010). As competências que a calculadora gráfica promove no ensino/ aprendizagem da matemática: um estudo de caso numa turma do 11.º ano. *Interações*, 15, 141-172.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Anexo I – Tarefa 1A

A D. Maria, natural da Ilha de Santa Maria, produz dois tipos de doces: biscoitos de orelha e cavacas.
Cada quilograma de cavacas dá um lucro de 5 euros e cada quilograma de biscoitos de orelha dá um lucro de 7 euros.
Relativamente aos produtos necessários à confeção dos doces, a D. Maria só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 kg de açúcar e de 6 kg de farinha.

Sabe-se que:

- Cada quilograma de cavacas leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha.
- Cada quilograma de biscoitos de orelha leva 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha.

Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível? Determina o valor desse lucro.

Anexo II – Tarefa 1B

A D. Maria, natural da Ilha de Santa Maria, produz dois tipos de doces: biscoitos de orelha e cavacas.
Cada quilograma de cavacas dá um lucro de 5 euros e cada quilograma de biscoitos de orelha dá um lucro de 7 euros.
Relativamente aos produtos necessários à confeção dos doces, a D. Maria só tem limitações em dois: dispõe apenas de 10 kg de açúcar e de 6 kg de farinha.

Sabe-se que:

- Cada quilograma de cavacas leva 0,4 kg de açúcar e 0,2 kg de farinha.
- Cada quilograma de biscoitos de orelha leva 0,2 kg de açúcar e 0,3 kg de farinha.

Quantos quilogramas de cavacas e quantos quilogramas de biscoitos de orelha deve a D. Maria fabricar para ter o maior lucro possível? Determina o valor desse lucro.

Para responderes a esta questão, percorre as seguintes etapas:

1. Preenche as tabelas seguintes.

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	1			
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	1			
Total				

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	2			
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	3			
Total				

		Quantidade de açúcar (Kg)	Quantidade de farinha (Kg)	Lucro
Quantidade de cavacas (Kg)	x			
Quantidade de biscoitos de orelha (Kg)	y			
Total				

2. Indica, para cada item, a condição correspondente.

	Condição
x (quantidade de cavacas, em kg) toma valores positivos ou nulos.	
y (quantidade de biscoitos de orelha, em kg) toma valores positivos ou nulos.	
A quantidade de farinha utilizada é inferior ou igual a 6 kg.	
A quantidade de açúcar utilizada é inferior ou igual a 10 kg.	

3. Representa geometricamente o conjunto de pontos do plano definidos pela conjunção das condições da alínea anterior e determina as coordenadas dos vértices do polígono obtido.

4. Escreve a expressão que define a função Lucro.

5. Calcula o valor da função Lucro em cada um dos vértices do polígono.

6. Interpreta os resultados obtidos e responde à questão inicialmente colocada.

Anexo III – Tarefa 2

O José tem uma loja de desporto e precisa de comprar bolas de andebol para vender ao Clube Desportivo “Os Marienses”.
Num armazém que vende produtos da marca branca SOL encontrou o seguinte cartaz:

Em bolas de andebol, pague
APENAS:
*12 € por cada bola de marca oficial**
8 € por cada bola da marca SOL
*promoção válida em compras superiores a 10 bolas de andebol da marca oficial

O José quer aproveitar esta promoção mas na mala do carro cabem apenas 45 bolas e o número de bolas da marca SOL deve ser inferior ou igual ao dobro do número de bolas de marca oficial.
Depois de analisar os preços praticados nas lojas concorrentes, o José pretende vender cada bola de marca oficial a 14 € e cada uma das bolas da marca SOL por 11 €.
Sabendo que o José pretende maximizar o lucro, L, na venda das bolas, determina o número de bolas de marca oficial e o número de bolas da marca SOL que o José deve comprar.

Anexo IV – Questionário

1. Para cada afirmação, assinala com um X, a opção que consideras mais adequada.

Afirmação		Discordo totalmente	Discordo	Concordo	Concordo plenamente
1.	A matemática é uma disciplina muito interessante.				
2.	A matemática é uma disciplina que exige muito trabalho e dedicação.				
3.	A matemática é uma disciplina difícil e exigente.				
4.	A matemática que se aprende na escola não está relacionada com a Matemática da vida real.				
5.	A matemática é muito importante na minha educação.				
6.	A matemática é fundamental para entender o mundo e nele viver.				
7.	Estudar matemática permite melhorar as capacidades de pensar, raciocinar e resolver problemas.				
8.	Gosto de estudar matemática.				
9.	Estudar em grupo é mais interessante porque posso partilhar ideias e esclarecer dúvidas.				
10.	Durante a realização das tarefas, recorri cada vez menos à ajuda do professor.				
11.	Senti necessidade de mais tempo para resolver as tarefas propostas.				
12.	Como construi o meu próprio conhecimento, senti vontade de saber mais sobre o assunto estudado.				
13.	Com estas tarefas, pude ser mais autónomo e crítico.				
14.	O trabalho em pares facilitou a aprendizagem.				
15.	O trabalho em pares contribuiu para a discussão das ideias.				
16.	O trabalho em pares contribuiu para uma aprendizagem motivadora.				
17.	Com a realização destas tarefas, senti-me mais responsável pela minha aprendizagem e pela do meu colega.				
18.	O trabalho em pares promoveu a comunicação matemática.				
19.	O trabalho em pares permitiu a troca de ideias.				
20.	Com o uso da calculadora, aprendi matemática de forma mais motivadora.				
21.	O uso da calculadora tornou as aulas mais interessantes e atrativas.				
22.	O uso da calculadora facilitou a aprendizagem da Programação Linear.				
23.	A utilização da calculadora gráfica foi útil na resolução de tarefas.				
24.	Com o uso da calculadora, aprendi novos conceitos.				
25.	O uso da calculadora contribui para uma				

	visão da matemática mais dinâmica e positiva.				
26.	O uso da calculadora contribui para desenvolver o pensamento crítico.				
27.	O uso da calculadora contribui para desenvolver a autonomia.				
28.	O uso da calculadora estimula a autoaprendizagem.				
29.	O uso da calculadora contribui para o desenvolvimento de competências de resolução de problemas.				
30.	Com a utilização da calculadora gráfica senti estar a construir o meu próprio conhecimento.				
31.	A resolução de problemas de Programação Linear foi importante e útil.				
32.	A resolução de problemas tem um papel importante na aprendizagem da matemática.				
33.	Os problemas apresentados nas aulas eram interessantes e originais.				
34.	A resolução de problemas contribui para desenvolver o raciocínio matemático e a capacidade de argumentação.				
35.	A resolução de problemas contribui para perceber a importância da matemática na vida real.				

2. Como vês o estudo de aplicações da matemática na realidade?

3. Como vês a descoberta da resolução de tarefas, autonomamente, em vez de ser o professor a apresentá-las?

4. O que foi fácil e o que foi difícil durante a resolução das tarefas? E o que fizeste para superar as dificuldades?

5. Achas que o trabalho desenvolvido foi eficaz na aprendizagem? Refere os aspetos positivos e os aspetos negativos desta atividade.

6. Qual a vantagem de usar novas tecnologias na resolução de problemas de Programação Linear?

Nome: ____ Obrigada pela tua colaboração!